

FELSEFE VE MATEMATİĞİN KESİŞİMİNDE BÜYÜKLÜKLERİN DOĞASI ÜZERİNE: KANT VE RIEMANN¹

[On The Nature Of Magnitudes At The Intersection Of Philosophy And Mathematics: Kant And Riemann]

Dinçer ÇEVİK

Doç. Dr., Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Felsefe Bölümü
dincercevik@mu.edu.tr

Orcid Id: <https://orcid.org/0000-0001-5897-7381>

ÖZET

Felsefe ve matematiğin kesiştiği bağlamlardan birisi de büyüklükler ve büyüklüklerin kavramsallaştırması ile ilgilidir. Büyüklüklere gönderimle kullanılan kavramlar, özellikle de *manifold* kavramı hem felsefede hem de matematikte önemli bir yer tutar. Immanuel Kant da hem Eleştiri dönemi öncesinde yazılarında, *Saf Aklın Eleştirisi*'nde, *Prolegomena*'da ve *Doğa Biliminin Metafiziksel Temelleri*'nde manifold kavramını kullanmıştır. Matematik tarihinde ise söz konusu kavram özellikle Georg Friedrich Bernhard Riemann'ın matematik anlayışının merkezindedir. Bu

¹Bu makale 2011 yılında tamamlanan Riemann'ın Manifold Kavramı ve Yeni bir Mekan-Geometri İnşasındaki Yeri" adlı tez temel alınarak türetilmiştir.

bağlamda giriş kısmından sonra makalenin ilk bölümünde Kant'ın matematik felsefesindeki büyüklük kavramları olarak kullandığı *quanta*, *quantitas* ve *manifold* kavramlarının onun felsefesinde temelde cebir-aritmetik ve geometri arasındaki farklara dayandırılan bir çeşitlilik içinde kavrandığı gösterilecektir. Makalenin ikinci kısmında ise Riemann'ın manifold kavramını ele alışı incelenecektir. Makalenin üçüncü bölümü Kant ve Riemann'ın büyüklük anlayışlarının karşılaştırmalı bir analizini yapmaktadır.

Anahtar sözcükler: Manifold, Kant, Riemann, geometri, uzay.

ABSTRACT

One of the contexts where philosophy and mathematics intersect is concerned with magnitudes and the conceptualization of magnitudes. Concepts used in reference to magnitudes, especially the concept of *manifold*, hold significant importance in both philosophy and mathematics. In the history of mathematics, this concept is particularly central to Georg Friedrich Bernhard Riemann's understanding of mathematics. Kant also employed the concept of manifold in his works, both in his pre-Critical writings and in the *Critique of Pure Reason*, *Prolegomena*, and *Metaphysical Foundations of Natural Science*. In this context, after the introduction, the first section of the article will show that Kant's concepts of *quanta*, *quantitas*, and *manifold*, used as concepts of magnitudes in his philosophy of mathematics, are fundamentally understood within a variety based on the differences between algebra-arithmetic and geometry. The second section of the article will examine Riemann's approach to the concept of manifold. The third section of the article provides a comparative analysis of the understandings of magnitude by Kant and Riemann.

Keywords: manifold, Kant, Riemann, geometry, space.

1. Giriş

Matematikçi Ken'ichi Ohshika, manifold kavramının modern geometrinin, hatta bir bütün olarak çağdaş matematiğin çok önemli kavramlarından birisi olduğunu vurgular (2017, s.295). Manifold kavramının matematikteki (özellikle topolojideki) kullanımının başlangıcı genellikle Riemann'a atfedilir. Literatürdeki genel uzlaşıya göre, İngilizceye "manifold" olarak çevrilen "Mannigfaltigkeit" terimi ilk kez Riemann'ın ünlü *Habilitationsvortrag*'ında yer alır. Ohshika ayrıca, Friedrich Schiller'in "Mannigfaltigkeit" başlıklı şiiri de dahil olmak üzere "Mannigfaltigkeit" kavramının Riemann'ın çalışmalarından önce matematiksel olmayan bağlamlarda da kullanıldığını ekler.² Söz konusu bağlama Kant'ın felsefesi de dahil edilebilir. Kant'ın diğer büyüklük kavramsallaştırmalarının yanında manifold kavramını ele alış biçimi de onun genel olarak epistemolojisi özel olarak da matematik felsefesi bağlamında ele alınabilir.

Matematiksel ve felsefi bilginin malzemesi olarak büyükler her iki alanda da bazen oldukça benzer, bazen de farklı çerçevelerde değerlendirilmiştir. *Quanta*, *quantitas* ve *manifold* kavramları bu bağlamda değerlendirilebilir. Bu bağlamda makalede öncelikle söz konusu üç kavramın Kant'ın felsefesinde nasıl konumlandığı ele alınmaktadır. Ardından, matematiksel büyüklerin kavranışında *Größenlehre* yaklaşımı tarihsel açıdan ele alınmaktadır. Sonrasında odaklanılan üç kavram özelinde Kant ve Riemann bilgi kuramsal açıdan karşılaştırılmaktadır. Bu karşılaştırılma temelinde varılan sonuca göre Kant'ın büyüklükleri ele alış biçimi zaman zaman onun matematik felsefesi ile ilişkilenebilirken, Riemann'ın büyüklükleri ele alış biçimi doğrudan onun uzay ve geometriye dair kavrayışı temellerinden başlayarak yeniden tanımlama girişimi ile ilişkilidir.

2. Kant'ın Felsefesinde Büyüklükler: *Quanta*, *Quantitas* ve *Manifold*

Kant, *Saf Aklın Eleştirisi*'nde mantık, matematik ve fiziğin kesin, sağlam bilimler olarak nitelenmelerinin, onların sahip oldukları *a priori* zemine bağlı olduğunu ifade eder. Kant'ın felsefesinde uzay ve zaman *a priori* formlar olarak geometrik ve aritmetik nesnelerin *a priori*

² Riemann'ın *Habilitationsvortrag*'ından başlayarak manifold kavramının gelişimi, detaylandırılması ve evriminin analizi için bkz. (Ohshika, 2017). Alternatif olarak, Grassmann'dan Riemann'a ve Husserl'e kadar manifold kavramının tarihsel yörüngesinin incelenmesi için bkz. (Morales, 2019).

inşasını kategoriler, hayal gücü ve aklın faaliyetleri ile birlikte matematiği olanaklı kılar. Biliş, manifoldun bir sentez yoluyla bir araya getirilmesini sonucu biliş mümkün hale gelir. Söz konusu manifold, ister empirik ister *a priori* biçimde verilmiş olsun, tek başına biliş üretme kapasitesine sahip değildir; bilişi olanaklı kılan, transendental metot ile ulaşılan sentezdir. Kavramsal içerik yalnızca bu birleşim süreciyle ortaya çıkar (Kant, 1998, s.210-211). Dolayısıyla Kant, bilginin kaynağı ile ilgili olarak yaptığı *a priori-a posteriori* ayrımını manifolda da uygular (Dursun, 2004, s. 54-55).

Biliş, manifoldun bir sentez yoluyla bir araya getirilmesini sonucu biliş mümkün hale gelir. Söz konusu manifold, ister empirik ister *a priori* biçimde verilmiş olsun, tek başına biliş üretme kapasitesine sahip değildir; bilişi olanaklı kılan, transendental metot ile ulaşılan sentezdir. Kavramsal içerik yalnızca bu birleşim süreciyle ortaya çıkar. Kant özellikle *Eleştiri*'sinde birçok yerde görünüşün manifoldundan bahseder. Buna göre her görünüş bir manifold içerir Kant'a göre [...] hayal gücü, sezginin manifoldu bir imgeye getirmelidir; bu nedenle, önce izlenimleri kendi etkinliğine almalıdır, yani onları kavramalıdır (Kant, 1998, s.239).

Yani Kant'a göre manifold görünüşün içeriği oluşur. Görünüşün biçimi ise görünüşün manifoldunun düzenlenmesi ve belirlenmesi içinde rol alır; "Görüngüde duyuma karşılık gelen şeye onun maddesi, ancak görünüşün manifoldunun belli ilişkiler içinde düzenlenmiş olarak görülenmesini sağlayan şeye görüngünün biçimi diyorum." (Kant, 1998, 155-156) Görünüşün biçimine biz *a priori* olarak sahibizdir, içeriği ise empirik olarak verilir. *A priori* biçim, içeriğin olanağının koşulu olduğu için zihindedir. Görüngünün manifoldu da zihindedir ama empirik olarak verilir (Dursun, 2004, s.54). Kant manifoldun zihinde nasıl oluştuğuna dair net bir tanım vermez. Ancak yine de saf görünüşün formları olarak uzay ve zamanın görünüşün manifoldunu içerdiğini belirtir (Kant, 1998, s.210). Kant, manifold kavramsallaştırması temelinde sentez sürecinin de tanımlandığı bir bilişsel mimari sunmaktadır. Duyusallığın manifoldunun saf anlama yetisinin kavramlarının gereçleri olmasına benzer biçimde, manifold genel olarak bilginizin malzemesidir. *Eleştiri*'de manifoldun geçtiği yerler göz önüne alındığında manifoldun duyum sonucu oluşan tasarımlar olarak değerlendirilmesi makul bir yorum olarak görünmektedir. Ancak yine de bu daha çok empirik manifolda yakın duran bir yorumdur ve *a priori* manifold için böylesi bir yorum sorgulanmaya açıktır (Dursun, 2004, s.54).

Sonuç olarak Kant manifold kavramını özel bir anlamda kullanmaz; Kant her türlü çokluk için bu kavramı kullanır. Büyüklük olmanın temel özelliği homojen manifold olmak; bunun

ötesinde *görüde* homojen manifold olmaktadır. Büyüklük kavramına sentetik birliğe eklemeksizin büyüklüğün *görüde* homojen manifold dışında bir anlamı yoktur (Sutherland, 2004, 426). Kant büyüklüğü *görüdeki* genel homojen manifold olarak tanımlar. Bu suretle o, bizim saf formlarımız olan uzay ve zamandan soyutlanan şeydir (2004, s.426). Kant büyüklüğü şöyle tanımlar: “Şimdi, genel olarak *görüde* homojen çokluğun bilinci, bir nesnenin temsili bunun aracılığıyla ilk kez mümkün hale geldiği ölçüde, bir büyüklük (*Quanti*) kavramıdır” (Kant, 1998, s.287).³ Öte yandan Kant’ın özellikle matematiksel biliş ile ilgili kullandığı iki kavram daha vardır; *quantum* (Alm. ‘*quanti*’, İng. ‘*quantum*’) ve *quantitas*.⁴ Bu iki kavram arasındaki ayrımı Kant, *Eleştiri*’nin *Görünün Aksiyomları* (*Axioms of Intuition*) kısmında yapar. *Quanta* ile *quantitas*ın rolleri farklıdır. Kant, her iki kavram için de ‘büyüklük’ (*Gröse*) terimini kullanır. Latince –*itas* eki soyut bir entiteye ya da bir özelliğe referans vermek için kullanılır (Sutherland, 2004, s.427). Bu perspektiften *quantitas*ın *quantuma* göre daha soyut bir büyüklüğe referansla kullanıldığı düşünülebilir. Yine de *quantumun* görece daha somut olması onun zorunlulukla uzay ve zamana has özelliklere sahip olduğu anlamına gelmez. *Quantumun* zamansallık ve uzaysallık kazanabilmesi için *quanta* olarak *görüde* tasarımılanması gerekir. Yani *quanta* *görüde* tasarımılanırsa zamansal ve uzaysal özelliklere sahip olabilir. Kant *quantumu* *görüde* genel olarak bulunan homojen manifold olarak tanımlar. Bu nokta önemlidir çünkü *görünün* bilme ediminde özellikle matematiksel bilmedeki rolü *homojen manifoldu* sunmaktır. Bu özellik uzay ve zaman *görüler*i için ortaktır, herhangi birinin tikel özelliklerine bağlı değildir (Sutherland, 2004, s. 428).

Kant hiçbir yerde *quantitası* net bir şekilde tanımlamaz. *Quantitas*’ı karakterize eden şeyi Kant, ‘Bir şey ne kadar büyük?’ sorusunun yanıtı olacak şekilde düşünür. Örneğin ‘İki nokta arasında yalnızca bir doğru çizilebilir’ ya da ‘İki düz çizgi bir uzay kapatamaz’ gibi önermeler yalnızca *quanta* ile ilgilidir. Öte yandan:

Ancak büyüklük (*quantitas*) ile ilgili olarak, yani “Bir şey ne kadar büyük?” sorusunun cevabına gelince, bu önermelerin çeşitli olanları sentetik ve doğrudan doğruya kesin (*indemonstrabilia*) olsa da yine de tam anlamıyla aksiyomlar yoktur (Kant, 1998, s.288).

³Her iki sözcük de makale boyunca tabi oldukları dilbilgisi kurallarına göre görece farklılaşmış biçimlerde geçse de *quanta* nicelik olarak büyüklük, *quantitas* ise kavramsal büyüklük anlamına gelecek biçimde anlaşılmalıdır.

Geometrinin önermeleri uzaya ilişkin *büyüklikleri* ilgilendirir, onların *miktarlarını* değil. Diğer yandan *quantitas* bir miktar belirtir. Ölçüm işi, bir birim ya da sayı belirlemeyi gerektirir. Bu yolla kaç tane birimin ölçülen şeydeki miktara denk düşüp düşmediği ölçülür. Bir şeyin miktarı, yani *quantitası* seçilen birimden bağımsızdır ve ölçülen nesnenin bir özelliğidir. Örneğin bir cetvel bizim onu tanımlamamızdan ve ölçmek için belirlediğimiz birimden bağımsız olarak, 28 cm ya da 11 inçtir. *Quantitas* somut tikel *quantumun* soyut bir miktarıdır; örneğin söz konusu cetvelin uzunluğudur. Bu cetvel ile bir kâğıt parçası eşit *quantitasa* sahip olabilir ancak her biri ayrıca kendi *quantitasına* sahiptir. Buna alternatif olarak, *quantitas* farklı *quantalar* tarafından paylaşılan ortak soyut bir miktar olabilir. Söz konusu cetvelin *quantitası* bu kâğıt parçasının *quantitası* ile bir ve aynı olabilir (Sutherland, 2004, s. 428).

Cebir, aritmetik ve geometri arasındaki farktan yola çıkılarak da Kant'ın *quanta* ile *quantitas* arasında yaptığı ayrım anlaşılabilir. Yukarıdaki alıntıda Kant'ın *indemonstrabilia* olarak belirlediği *quantitası* ilgilendiren önermelere aritmetikten $7+5=12$ toplama işlemi örnek olarak verilebilir. Bu tür önermeler aksiyom değildirler çünkü geometrinin aksiyomlarının aksine 'genel' değildirler (Kant, 1998, s. 288). Sonuç olarak geometri *quantayı* ilgilendirir ve aksiyomları vardır, diğer yandan aksiyomları olmayan aritmetik *quantiteyi* ilgilendirir. Geometrinin görüşünün nesnesi büyüklük olarak *quantadır* (Friedman, 1992, s.107). Kant *Eleştiri*'nin ilerleyen bölümlerinden birinde yine cebir-aritmetik ve geometri arasındaki bir farka dikkat çeker:

Ancak matematik sadece geometride olduğu gibi büyüklükler (*quanta*) inşa etmekle kalmaz, aynı zamanda cebirde olduğu gibi sadece büyüklüğü (*quantitatem*) de inşa eder; burada, böyle bir büyüklük kavramına göre düşünülmesi gereken nesnenin yapısından tamamen soyutlanır (Kant, 1998, s. 632).

Burada *quanta* ile *quantitas* arasındaki ayrım “geometrik yani gösterime dayalı” (ostensive) olanla ‘sembolik’ olan ‘karakteristik inşa’ (Kant, 1998, s.641) arasındaki ayrıma göre yapılmaktadır. Geometrik inşa nesnelerin kendisiyle ilgilenirken, sembolik inşa nesneleri oluşturulma biçiminden soyutlar. Kant yukarıdaki alıntıda aritmetikten değil cebirden bahseder. Ancak yine de Kant sembolik inşa bağlamında ikisini de benzer bağlamda değerlendirmektedir

(Friedman, 1992, 108). Gösterime dayalı inşa “nesnelerin kendileriyle” ilgilidir. Öte yandan sembolik inşa ise “nesnenin inşasından bütünüyle soyutlanmıştır” (Friedman, 1992, s.108).

Cebir ve aritmetiğin soyut oluşu ile geometrinin doğrudanlığı arasındaki bu ayrım temelinde *quanta* ile *quantitas* arasındaki fark daha açık kılınabilir. Nesne niteliğinden bütünüyle soyutlandığında artık somut nesnenin kendisi önemsizleşir. Bu durum, cebir söz konusu olduğunda *quantitas*ın *quanta* ile doğrudan bir ilişkisi olmadığı yargısının doğru olma ihtimalini kuvvetlendirir. Yukarıda verilen örnek bu bağlamda yeniden değerlendirilebilir. Aritmetiğin *quantitası* 7 ve 5 gibi tikel rakamlara işaret eder. Diğer yandan cebirin *quantitası* ise bu tikel rakamlardan soyutlama yaparken bu rakamları değişkenler olarak ele alır (Sutherland, 2004, s. 429). Kant’ın cebirde tam soyutlamayı vurgulaması, cebirin nesnesi olmadığı ya da nesnesine genel anlamda sahip olduğu şeklinde yorumlanabilir (Friedman, 1992, s.108; Sutherland, 2004, s.429).

Kant, cebir ve aritmetiği kendi belirli alanları olmayan matematik dalları olarak ele alır. Buna göre cebir ve aritmetik yalnızca belirli tipteki problemleri çözmek için hesaplama tekniklerini içeren, dolayısıyla her türlü nesnenin büyüklüğünü hesaplayabilecek matematiğin genel büyüklük teorisi kapsamında değerlendirilir. Kant için kendi özel nesne alanına sahip olan matematik dalı geometridir. Kant ve Öklid bu bakış açısını paylaşırlar (Friedman, 1992, s.112-113). Geometride verilen uzunluklar, alanlar, hacimler öncelikle uzaysal büyüklükler olarak kavranır. Verilen bu uzaysal büyüklükler, örneğin sonlu bir uzunluk parçası ‘girdi’ (input) olarak ele alınır. Bu girdiden hareketle verili uzunluk parçasının uzunluğunun büyüklüğü sorusunun yanıtı ‘çıktı’ (output) olarak değerlendirir (Friedman, 1992, s.112). Bu çıktıyı belirleyebilmek için yani söz konusu çizginin ne kadar uzun olduğunu anlamak için varsayıma dayalı bir ‘birim’ (unit) belirler. Örneğin eğer söz konusu büyüklük bir karenin köşegeni ise, bu köşegenin büyüklüğünün belirlenebilmesi için karenin bir kenarını ‘birim’ olarak belirlenir. Eğer büyüklük ve seçilen birim aynı standartlar yardımıyla ölçülebilirse, aritmetik belirli bir kesir ya da sayı verir. Böyle bir durum söz konusu değilse cebir, sayılarla yaklaşık bir değer bulunabilmesi için kesin bir kural verir (Friedman, 1992, s. 112). Cebir ve aritmetik geometriden farklıdır. Michael Friedman’a göre geometriye kıyasla cebir ve aritmetiğin soyut oluşu, onların görümüzün nesnelerinin doğası ve varlığı hakkında herhangi bir özel varsayımda bulunmamalarından kaynaklanır (Friedman, 1992, s. 114). Cebir ve aritmetiğin soyut oluşu onların hesaplama teknikleri ile ilgilidir. Cebir ve aritmetiğin kendilerinde biz büyüklüklerin doğası ve varlığı

hakkında bir şey varsaymayız, yalnızca ‘ekleme, çıkarma, kök bulma’ gibi işlemler yaparız ve büyüklükleri manipüle edecek örneğin ‘oran’ gibi kavramlara başvururuz. Hangi büyüklüklerin hesaplandığı görümüz tarafından ve cebir ve aritmetikten bağımsız olarak tesis edilir. Böylece, uzunluk, alan ve hacimler olarak büyüklükler ve diğer tipteki büyüklükler de kavranabilir olur (Friedman, 1992, s. 114).

Quanta, görünün büyüklükler olarak nesnesi, yalnızca özel tipte büyüklüklerdir. Bu büyüklükler, Öklid’in ilk üç aksiyomu tarafından ilgili uzaysal figürlerin kurulmasını sağlayan aksiyomlarla verilir. *Quantitas*, genel olarak büyüklüğün belirlenmesiyle elde edilen şey olarak ve herhangi bir genel büyüklüğün özel bir büyüklüğünü hesaplamak için aritmetik ve cebir tarafından başvuru alan operasyon ve kavramları kapsar. Burada herhangi bir özel büyüklüğün varlığı için bir şey postüle etmeyiz, bu nedenle *quantitas* için aksiyomlar yoktur. *Quantitas*ın hesaplanması geometrinin farklı olarak bizim görümüzün özel karakterine bağımlı değildir, o bize şeyin kavramını genel olarak sağlar (Sutherland, 2004, s.429). Kant bu bağlamda şunu dile getirir: “Bununla birlikte, bir anlama kavramı olarak büyüklüğün (*quantitatis*) saf şeması, ardışık olarak bir (homojen) birimin diğerine eklenmesini özetleyen bir temsil olan sayıdır” (Kant, 1992, s. 274). Benzer biçimde Kant şunu dile getirir:

Quanta ile *quantitas* arasındaki ayrımı incelemenin başka bir yolu da Kant’ın *şematizm* anlayışını incelemektir. Kant’a göre şema, kavramlar ile görüler arasında aracı bir rol oynar. Kant şema ile en genel anlamıyla şunu kasteder: “İmgelem yetisinin bir kavrama imgesini sağlamaya yönelik bu evrensel işleminin bu tasarımını bu kavramın şeması olarak adlandırıyorum” (Kant, 1998, s. 251). Kant’a göre artık o zaman sorumuz şudur: “Eğer hiç kimse bir kategorinin, söz gelimi nedenselliğin duyular yoluyla görüldüğünü ve görüngüde kapsandığını söylemiyorsa o zaman görülerimizin saf kavramlar altına alınmaları ve dolayısıyla kategorilerin görüngülere uygulanmaları nasıl olanaklıdır?” (Kant, 1998, s.272). Bunun için nesnenin tasarımı ile kavram aynı türden olmalıdır. Yani kategorilerin görünümlere uygulanabilmesi için kavram, kavramın altına getirilen nesnede tasarımı olan bir şeyi içermelidir (Sutherland, 2004, s. 431). Şema, anlama yetisinin saf kavramlarına ek olarak empirik ve saf duyular kavramları için ayrı ayrı iş görebilir (Kant, 1998, s. 272; Sutherland, 2004, s.431). Anlama yetisinin saf kavramı, örneğin üçgen kavramı, empirik ve saf duyular kavramının aksine görüyle ortak bir içeriğe sahip değildir. Dolayısıyla anlama yetisinin saf kavramları görülerle doğrudan bağlantı içinde değildir. Bu ilişkinin kurulması *şema* ile

mümkündür. Kategorilerin şeması temsiller arasındaki zamansal ilişkileri belirlerken gereken kuralların biçimini alır. Kant’a göre kavramlar anlama yetisinin kurallarıdır ve şema bu kuralları yansıttığı sürece kavramlarla genelliğin gösterilmesi işini paylaşırlar. Zamanın belirlenimleri olarak şema zamanda, dolayısıyla görüde gösterilen her temsille ilişkilidir. Yani şemalar kategoriler ile görüler arasında bir köprü kurar (Kant, 1998, 272; Sutherland, 2004, s. 431). Şemanın kategorileri gibi, empirik kavramların ve duyumun saf kavramlarının şeması da kesin genel bir kavram için kurallardır (Kant, 1998, s.273). Yine de aralarında önemli bir fark vardır. Anlama yetisinin saf kavramlarının şeması ‘imge’ haline getirilemezken, empirik duyum kavramının şeması getirilebilir (Kant, 1998, s. 274; Sutherland, 2004, s.434).

Quantanın imgesi, yani uzay ve zaman kendi başlarına niceliğin kategorileri için imge üretemezler. Onlar yalnızca homojen manifoldu üretirler ve niceliğin kategorilerine göre belirlenim kazanırlar. Kant’ın bu bağlamda tikel bir *quantumun* imgesine gönderimde bulunmadığı, daha ziyade dış duyumun tüm *quantasına* ve iç duyumun tüm nesnesine gönderimde bulunduğu dikkat etmek önemlidir (Sutherland, 2004, s.434). Yani Kant’ın dikkat çektiği imgeler tikel zaman ve uzaylar değil, görüde belirlenmemiş olarak verili uzay ve zamandır. Kant bu suretle *quantanın* görüdeki herhangi manifolda genel olarak manifoldun belirlenmiş olup olmadığına bakmaksızın işaret ettiğini dile getirmiş olur (Sutherland, 2004, s. 434). Biz belirlenmemiş *quantayı* görüde temsil edebiliriz: “Sınırlarla çevrili olduğu sürece, toplamını ölçüm yoluyla, yani parçalarının ardışık senteziyle inşa etmemize gerek kalmadan belirsiz bir büyüklüğü (*quantumu*) bir bütün olarak görüleyebiliriz. Çünkü sınırlar, daha fazlasını keserek, zaten onun tamlığını belirler” (Kant, 1998, s. 470). Uzay ve zaman verili görüler olarak, yani belirlenmemiş büyüklüklerdir. Yani *quanta* belirlenmiş olup olmadığına bakılmaksızın görüdeki homojen her türlü manifolda uygulanabilen bir kavramdır (Kant, 1998, s.148). Şema ile imge arasındaki ilişkiyi anlamak için şu alıntı incelenebilir:

Bu nedenle, eğer beş noktayı yan yana yerleştirirsem ... bu, beş sayısının bir imgesidir. Aksine, eğer sadece genel olarak bir sayı düşünürsem, ki bu beş veya yüz olabilir, bu düşünme daha çok bir çokluğu temsil etme yönteminin (örneğin, bin) belirli bir kavramla uyumlu olarak bir görüntüsüdür, bu durumda kavramla imgeyi ancak zorlukla inceleyebilirim ve karşılaştırabilirim (Kant, 1998, s273).

Kant'ın burada altını çizmek istediği nokta, bizim beş kitaba bakarak beş elma çizerek beş sayısının imgesine sahip olabileceğimiz ama beş sayısının içerdiği bütün imgeleri karşılamayacağıdır. Yani beş sayısı imge ile karşılanamaz (Dursun, 2004, s. 65-66). Kant'a göre empirik kavramın şeması, örneğin alıntıda geçen "Üçgenin şeması, düşüncenin dışında asla var olamaz ve saf şekillerle ilgili hayal gücünün sentezinin bir kuralını ifade eder" (Kant, 1998, s.273). Yani şema bize, bir kavramın imgesini sağlamak, bu imge sayesinde genelliği göstermek ve bu genellik sayesinde bu kavram altında içerilen nesneler hakkında akıl yürütebilmek için genel bir prosedür verir (Kant, 1998, s.273). Böylelikle şema sayesinde tek tek üçgenleri değil tüm üçgenleri ilgilendiren sonuçlar hakkında akıl yürütebiliriz (Sutherland, 2004, s. 432-433). Cebir ve aritmetiğin nesneleri zamansal olmasa da büyüklük kavramının kurulmasında zamansal bir nokta vardır. Burada dikkat edilmesi gereken nokta *quantanın* değil, *quantitenin* zamansal olduğudur (Friedman, 1992, s.116). Bu alıntıdan *quantumun* değil de *quantitasın* kategorileri sunduğu ortaya çıkar. Kant rakamdan 'birlik', 'çokluk' ve 'bütünlük' kategorilerine uyan şema olarak bahseder (Sutherland, 2004, s.432). Burada *quantumun* kavramın *imgesine*, *quantitas*'ın ise *şemasına* denk geldiği düşünülebilir. Kant, *quantanın* imgesinden *quantitas*'ın ise şemasından bahsetmektedir. Dolayısıyla şema ve imge farklı şeylerdir. Yukarıdaki alıntıdan yola çıkılarak yine *quantitas* ile kategorilere referans verildiği vurgulanmalıdır. Kant, niceliğin kategorilerinin şemaları tarafından nasıl uygulandığını betimler ve *quantitasın* şemasını tanımlar. Kant'ın *quantaya* referansı ise *quantanın* saf imgesi ile sınırlı oluşu bağlamındadır. Kant *quantitas* olarak büyüklüğü anlama yetisinin kavramı olarak niteler. Dolayısıyla *quantitas* nicelik kategorisine denk düşmektedir (Kant, 1998, s.273).

Quanta- quantitas ayrımı dışında Kant büyükleri bir başka açıdan daha analiz eder. Bu bağlamda devam eden bölümde, kapsamlı ve yoğun büyüklükler ayrımı ele alınmaktadır.

2.1. Kapsamlı ve Yoğun Büyüklükler

Kapsamlı büyüklükler (extensive magnitudes) ve *yoğun büyüklükler* (intensive magnitudes) ayrımı Kant'ın büyüklükler ile ilgili başvurduğu bir diğer ayrımdır. Kant için bu kavramların ne ifade ettiğine geçmeden önce kapsamlı ve yoğun büyüklük ile ne kastedildiğini genel bir açıdan ele alarak başlamak daha uygun olacaktır.

Bazı nicelikler için birbirine bağlama, birbirine birleştirme ve sıralama işlemleri için doğal yollar mevcuttur. Örneğin bir metre çelik bir teli yan yana koyarak ve birbirlerine ekleyerek 4

metrelik bir çubuk elde edebilirsiniz. Birbirine ekleme işlemlerine böyle izin veren nicelikler *kapsamlı büyüklükler* olarak adlandırılır. Diğer yandan bazı nicelikler vardır ki böyle bir ekleme işi, onlar için mümkün değildir. Sıcaklık böyle bir niceliktir. 40 santigrat derecedeki bir kova suya 20 santigrat derece bir kova su dökülürse sonuç 60 santigrat derecelik bir su olmayacaktır. Dolayısıyla doğal ekleme işlemine izin vermeyen nicelikler de *yoğun büyüklükler* olarak adlandırılır. Kapsamlı büyüklükler karşılaştırmaya izin verdiğinden ve nümerik olarak temsil edilebilmeleri nedeniyle ölçüm işinin temel bir rol oynarlar (Torretti, 1990, s.60). *Görünün Aksiyomları (Axioms of Intuition)* kapsamlı büyüklükler, *Algı Öncelemeleri (Anticipations)* ise yoğun büyüklükler ile ilgilidir. Kant'a göre kapsamlı büyüklükler, parçaların gösteriminin, bütünün gösterimini mümkün kılan büyüklüklerdir:

Bir kapsamlı büyüklüğü, parçaların temsilinin bütünün temsilini mümkün kıldığı büyüklük olarak adlandırırım (ve bu nedenle bunun mutlaka sonrasında gelir). Ne kadar küçük olursa olsun, hiçbir çizgiyi, düşüncede çizmeden, yani tüm parçalarını bir noktadan ardışık olarak oluşturmada temsil edemem ve böylece bu görüşü ilk olarak eskiz olarak çizmem gerekir (Kant, 1998, s.287).

Duyumlar ve görüngülerde gösterilen ve onlara uyan şeyler ise yoğun büyüklüklerdir (Kant, 1998, s. 289). *Algı Öncelemeleri*'nde Kant yoğun büyüklükler içeren fenomene matematiğin uygulanmasının olanağını açıklar. Bu anlamda yoğun büyüklüklerin matematiğin uygulama alanı olması haricinde matematiğin olanağının açıklanmasında başka bir rolü yoktur (Sutherland, 2004, s.436). Öte yandan kapsamlı büyüklüklerin matematiksel bilmeyi açıklamada rolü vardır ve bu onu yoğun büyüklüklere göre öncelikli kılar. Yoğun büyüklükleri kapsamlı büyüklükler olmaksızın kavrayamayız (Sutherland, 2004, s.436). Kant'ın kapsamlı büyüklükler ve ardıl sentezin rol aldığı argümanı şu şekilde ortaya konulabilir:

1. Bir kapsamlı büyüklük parçaların gösteriminin bütünü mümkün kıldığı dolayısıyla parçaların bütünden önce geldiği bir şeydir.

2. Belirli zaman ve uzayın gösterimi ancak parçadan parçaya sürekli bir sentez ile olanaklıdır.
3. Ardıl sentez yoluyla kavranılan her şey parçaların bütünü olanaklı kılmasını zorunlu kılar.
4. Öyleyse, tüm belirli zaman ve uzay kapsamlı büyüklüklerdir.
5. Tüm görüngüler belirlenmiş⁵ zaman ve uzayda bir görü içerirler.
6. Öyleyse, tüm görüngüler kapsamlı büyüklüklerdir (Sutherland, 2004, s. 436-437).

Bu argümanda vurgulanması gereken ikinci basamaktır. Bu basamak Kant'ın *şematizm*'i ile daha iyi anlaşılabilir. *Quantitas*ın şeması, yani sayı, görünün nicelik kategorisi ile uyumlu olarak belirlenmesine rehberlik eder. *Ardıl sentez* belirlenmiş zaman ve uzayların önceden verilmiş parçalarının toplamı olarak sunulmasından sorumludur. Belirlenmiş zaman ve uzayların parça-bütün ilişkisinin sunulması geometri için önemlidir (Kant'ı alıntılaman Friedman, 1992, s. 119).

Ardıl sentez cebir ve aritmetikte olduğu gibi geometride de önemli bir rol oynar. Öklidyen geometrinin nesneleri, Öklid'in ilk üç aksiyomu istenildiği düzende ve sayıda tekrar edilerek elde edilebilir. Dolayısıyla geometrik inşa cebir ve aritmetiğin sembolik (ya da karakteristik) inşasına benzer şekilde yapılabilir. Geometrinin nesneleri zamansal olmak zorunda değildir. Geometrik inşa ediminin kendisi ise zamansal bir aktivitedir (Friedman, 1992, s. 119). Geometrik yapılaştırma zorunlulukla Öklid'in ilk üç aksiyomundan başlar, onları sabit veriler olarak alır ve geometrik operasyonlarda tekrarlanır. Aritmetik ve cebirde ise sabit girdilerimiz yoktur yalnızca tekrarlanan prosedürlerden oluşan ardıl sentez uygulanır (Friedman, 1992, s. 119).

Kant 'büyüklük' için *quanta* ve *quantitas* kavramlarını kullanır. Yine Kant manifoldu teknik bir şekilde tanımlamadığı gibi, özel bir anlamda da kullanmaz. Onun için manifold her türden 'çokluk' için kullanılan bir kavramdır. 'Büyüklük' ve 'çokluk' Kant'ın daha çok biliş, özel

⁵ 'Belirleme' Kant için matematiksel bilmenin ve büyüklüklerin hesabının verilmesinde önemli bir yer tutar. Kant'a göre çizgiler, yüzeyler, zaman ve deneyimin nesnesinin tikel tüm zamansal ve uzay ile ilgili özellikleri belirli zamanlar ve uzaylar olarak değerlendirilebilir. Yani, belirli zaman ve uzay hem geometride kurulabilecek figürleri hem de düşüncede kurulabilecekleri içerir (Sutherland, 2004, s.417).

olarak da matematiksel bilişin hesabını verirken başvurduğu kavramlardır. *Quanta* belirlenmemiş büyüklükleri içeren görüdeki *homojen manifold* iken, *quantitas* nicelik kategorilerine denk düşmektedir; yani ölçüm sonucunun miktarıdır. Kant'a göre görünün işlevi *homojen manifoldu* temsil etmek olduğundan *quanta* ve *quantitas* saf görünün işlevi çerçevesinde anlaşılmalıdır.

Manifold kavramının analizi, kavramın ele alındığı bağlamı matematik tarihi açısından da ele almayı gerektirir. Devam eden bölümde, bahsi geçen bağlamın çerçevesi çizilmektedir.

3. Bir Matematik Kavrayışı Geleneği olarak *Größenlehre* ve Riemann'da Manifold Kavramı

Manifold kavramının ortaya çıktığı bağlamı araştırırken başka bir yol göz ardı edilmemelidir. Söz konusu yol matematik felsefecisi ve tarihçisi Jose Ferreiros'un analizleriyle daha açık kılınabilir. Ferreiros'a göre 19.yy. ortalarında matematik halen Greklerden beri süregelen geleneksel bir şekilde büyüklüklerin bilimi (science of magnitudes) olarak tanımlanmaktadır. Ferreiros bahsi geçen geleneğin köklerini Aristoteles'e kadar götürür. Buna göre Aristoteles'te sayıları içeren parçalı (discrete magnitudes) büyüklükler ve sürekli büyüklükler (continuous magnitudes) olarak da çizgi, yüzey ve cisim arasında bir ayrım vardır (Ferreiros, 2007, s.41). Aristoteles'e göre büyüklükler ve sayılar (magnitudes and numbers) matematiğin konuları arasındadır. Bu Grek anlayışının 19. yüzyıl Almanya'sında matematiği şekillendirdiğini söylemek mümkündür. Bu tarz bir bakış açısı aritmetik ve geometrinin aynı başlıkta toplanabileceği basit matematiğin genel bir açıklamasını öneriyordu. Bu dönemde Almanya'da matematiğin büyüklüklerin bilimi olarak kabulünün farklı örneklerini sunmak mümkündür. Matematik felsefecisi ve tarihçisi Jose Ferreiros, Leonhard Euler'in *Cebir*'inden yaptığı alıntı bunlara bir örnektir:

Öncelikle her şeyin arttırılabilir ya da azaltılabilir, onlara bir şeylerin eklenip onlardan bir şeylerin çıkartılabileceği büyüklükler olduğu kabul edilecektir... matematik onları ölçebilecek metotlar bulan *büyükliklerin biliminden* başka bir şey değildir (Ferreiros, 2007, s. 41).

Ferreiros matematiğin *Größenlehre* (büyüklüklerin bilimi) olarak kabulüne ilişkin başka kanıtlar da sunar. Örneğin Ludwig Hoffman’ın matematik sözlüğünde matematik “büyüklükler teorisi olarak” tanımlanır (Ferreiros, 2007, s.42). Ferreiros, bu tanımın dönemin matematikçiler tarafından da kabul gördüğünü belirtir. Carl Friedrich Gauss, Bernard Bolzano, Hermann Grassmann⁶ ve Karl Weierstrass çalışmalarını matematiğin bu klasik tanımı çerçevesinde yürüten isimlerdendir. Bu isimler arasında yalnızca Gauss topoloji alanındaki çalışmalarıyla bu geleneksel matematik anlayışının ötesine geçmiş görünür. Yine de bu geleneksel matematik anlayışı içinden gelmesine rağmen bu kavrayışı çok daha öteye götürme anlamında Riemann farklı bir konumda bulunmaktadır.

Riemann 1854 tarihli *Habilitationsvortrag*’a geometriyle ilgili gözlemlediği kafa karışıklıklarından söz ederek başlar.⁷ Riemann’a göre geometrideki temel kavramları tanımlamak için kullanılan ve sadece ismen var olan tanım ve kavramlara atfedilen nitelikler onların içsel özellikleri ve ilişkilerine dair bir ipucu vermekten uzaktır. Bu bakış açısından hareketle, Riemann uzay kavramını çok boyutlu yer kaplayan büyüklükler olarak tanımladığı *genel kavram*’dan ayırır (Torretti, 1978, s.83). Çünkü uzay kavramı, çok boyutlu yer kaplayan büyükler olarak tanımlanan genel kavramın sadece bir örneğidir. Riemann bu genel kavramı niceliğin genel kavramlarından yola çıkarak inşa etmeyi önerir (Torretti, 1978, s.83). Böyle bir inşa etme yöntemi ile uzayın doğası yeniden tanımlanmış olur; niceliğin genel kavramlarından inşa edilen çoklu yer kaplayan büyüklük yani manifold olarak uzayın üzerine farklı metrik sistemler tanımlanabilir. Riemann niteliksel olan uzam özellikleri (topolojik özellikler) ile mesafe ile ilgili olan ölçüm özelliklerini (metrik ile ilgili bağıntılar) ayrımı yapar. Bu bağlamda, Riemann, kendi zamanında egemen olan Öklidyen metriğin geçerli olduğu uzayın yapısına dair ön kabullerinin gerekliliğini ve *a priori* olup olmadığını sorgulayarak başlar; “bu kabullerin bağlantılarının ne kadar gerekli, mümkün veya apriori olduğunu tespit etmek mümkün değildir” (Riemann, 1929, s.411).

⁶ Grassmann’ın matematik anlayışı için bkz. (Çevik, 2023b, s.8-17.).

⁷ *Habilitationsvortrag*, Riemann’ın yaşadığı dönemde Alman üniversitelerinde doktora sonrası üniversite konseyi tarafından belirlenen belirli bir konuda verilen derstir. Bu ders başarılı bir şekilde verilmeksizin üniversitede eğitim vermenin imkânı yoktu (Monastyrsky, 1987, s. 23).

Eğer bir manifoldun her bir noktasından bir başkasına ilerlersek iki boyutlu (iki kez yer kaplayan) bir manifold ortaya çıkar. Eğer bu iki boyutlu manifold üçüncüsüne uygulanırsa üç boyutlu (üç kez yer kaplayan) bir manifold ortaya çıkar. Burada önemli bir nokta, tek boyutlu durumda tek bir doğrultuda (ileri ve geri) hareket edilebiliyor olmasıdır. Yani, iki boyutlu bir manifold (yüzey) üzerinde hareket tanımlamak için iki ayrı doğrultudan bahsedilebilmelidir, üç boyutlu manifoldlar (uzay) içinse üç ayrı doğrultu var olmalıdır. N -boyutlu manifoldlar da n farklı doğrultu olarak benzer şekilde değerlendirilebilir. Riemann manifoldları ikiye ayırır; şayet bir manifoldtan bir başkasına sürekli bir yol (path) varsa bu manifold “sürekli manifold” olarak adlan aksi takdirde “ayrık manifold” olarak adlandırılır. Riemann sürekli manifoldlara örnek olarak “renkler”i ve “duyusal nesnelerin konumları”nı verir. Riemann’a göre ayrık manifoldların örneklerine ise daha sık rastlanır (1929, s. 423).

Riemann'a göre uzay, yaşadığımız dünyadır, ama “çoklu yer kaplayan büyüklüklerin” yani manifoldun sadece bir örneğidir. Başka bir deyişle, Riemann, farklı manifoldlarda farklı metriklerin de mümkün olduğunu, yani gerçek dünyanın bu farklı metrik bağlantılarının sadece birine sahip olduğunu vurgular. Dolayısıyla, Riemann’a göre eğer başka metrik bağlantılar da olanaklıysa, o zaman “uzayın gerçek geometrisi salt kavramsal analizle tespit edilemez” (Torretti, 1978, s.84). Buradan hareketle Riemann, “uzayı, düşünülebilecek diğer üç boyutlu yer kaplayan niceliklerden ayıran özellikler sadece deneyim yoluyla elde edilebilir” olduğunun altını çizer (Riemann, 1929, s.412).

Riemann’ın uzayı manifold olarak tanımlaması geometriyi de geometri felsefesini de derinden etkilemiştir. Örneğin Luciano Boi’ye göre “yeni fikirler, özellikle Riemann’ınkiler, uzayın doğası ve geometrinin statüsüyle ilgili görüşlerimizi muazzam bir şekilde değiştirmiştir” (Boi, 1992, s.192). Bu belirlemeden sonra Boi, Riemann’ın genel olarak uzayın incelemesi ve özel olarak manifold kavramını incelemesinin merkezine yerleştirmesiyle ilgili konumunu şu şekilde açıklar:

Öncelikle bu bilimin [geometrinin] bizzat konusu artık değişmiştir; Riemann üç boyutlu Öklidyen uzayı değil matematiksel olarak çok daha genel bir kavram olan manifold (Mannigfaltigkeiten) kavramını inceler. Bu noktadan sonra Öklidyen uzay, sabit eğikliğe sahip, üç boyutlu bir manifoldun sadece herhangi bir örneğidir. İkinci olarak, geometrik uzay matematiksel olarak topolojik-biçimsiz, metrik, türevlenebilir ve topolojik-türevlenebilir olarak üç yapısal seviyede belirlenir. Bu

yapıların her biri tamamlayıcı özellikler ekleyerek uzay kavramının zenginliğini artırır. Üçüncü olarak, Riemann manifold kavramını sadece matematiksel açıdan değil, aynı zamanda fiziksel ve diğer doğal fenomenleri daha bilinebilir ve anlaşılabilirliği açısından Öklidyen tasavvurdan daha genel ve güçlü addeder; Riemann için matematiksel ve özellikle geometrik yapıların fiziksel öneme sahip olduğu, geometriyi fiziksel evrenin idealize edilmiş bir görüntüsü olarak gördüğü de unutulmamalıdır (Boi, 1992, s.192).

Alıntıdan da anlaşılacağı üzere Riemann'ın kullandığı biçimiyle manifold kavramı daha çok matematik ve doğa bilimleri bağlamında değerlendirilmektedir. Bu anlamda manifold günümüzdeki anlamıyla matematikte, özellikle topolojide kullanılan ve “katmanlı uzay” niteliğiyle özetlenebilecek bir kavramdır. Sonuç olarak Riemann manifold kavramı ve onun üzerinden geliştirdiği fiziksel ve matematiksel çözümlemelerle matematikteki önemli dönüm noktalarından birisinin belirleyicisi olmuştur.

4. Kant ve Riemann

Ohshika, Kant'ın *Eleştiri*'de manifoldu kullanma biçiminin bir nesneye değil de şeylerin “çoklu” olma durumuna denk düşen soyut bir ad olarak “çokluluk” (manifoldness) olarak çevrilebileceğini iddia eder. Diğer yandan Ohshika'ya göre sıfat olan “mannigfaltig”den türetilen bir isim olarak “mannigfaltige” sözcüğü Kant'ın onu matematiksel anlamda kullanmamasına rağmen Riemann tarafından kullanılan “mannigfaltigkeit” sözcüğüne daha yakın bir anlam taşımaktadır (2017, s.298). Ohshika'ya göre Kant'ın “Mannigfaltige” veya “Mannigfaltigkeit” sözcüklerini kullanma biçimi, günlük hayatta kullanılan “çeşitlilik” ve “farklılık” gibi kullanımlara yakındır ve bu anlamda Riemann'ın kullanımında olduğu gibi somut bir matematiksel nesneyi belirtmez (2017, s.298).

Kant'ın yine yoğun ve kapsamlı büyüklükleri ayrımı Riemann'ın sürekli ve ayrık manifold ayrımını anımsatmaktadır. Burada birebir bir benzerlik görünmese de özellikle Kant'ın kapsamlı büyüklükleri tanımlayış ve düşünüş biçimi Riemann'ın sürekli manifoldları tanımlamasına ve düşünmesine benzemektedir. Riemann'ın ayrık ve sürekli manifoldları ayırıp sürekli manifoldlarla yola devam etmesi de benzerlik göstermektedir. Riemann için iki sonsuz yakınlıktaki nokta arasında ölçüm yapmak sürekli manifoldlar için geçerlidir. Bu nokta Kant'ın kapsamlı büyüklüklerin kıyaslamaya dolayısıyla ölçmeye izin veriyor olduğu görüşü ile

benzerlik göstermektedir. Ayrıca Riemann manifoldun belli kısımlarından bahsetmek için *quanta* terimini kullanır. *Quanta* 'ların birbiriyle kıyası ayrık manifoldlarda 'sayarak' sürekli manifoldlarda ise 'ölçerek' mümkündür.

Kant'ın *quanta/quantitas* ayrımının detaylandırıldığı bölümde *quantitas*ın sorusunun büyüklük ile ilgili olduğu için ölçmeyi gerektirdiğinin altı çizilmiştir. Bu sorunun önemine Riemann da dikkat çeker:

Ölçüm kıyaslanacak büyüklüklerin üst üste getirme (süperpozisyon) işleminde yer alır, ölçüm bir büyüklüğü diğeri için ölçü olacak şekilde nakletmenin araçlarını gerektirir. Bunun yokluğunda iki büyüklük kıyaslaması ancak biri diğerrinin parçası ise mümkün olabilir, ki bu durumda bile yalnızca ne kadar fazla ya da az sorusunun yanıtına karar verilebilir, ne kadar çok sorusunun yanıtına değil (Riemann, 1929, s.413).

Alıntı Kant'ın büyükleri ele aldığına benzer biçimde Riemann'ın da geometri anlayışında da büyüklük ölçümünün önemli olduğunun altı çizilmektedir. Matematikte özellikle de geometride Kant ve Riemann'ın kapsamlı ve yoğun büyüklüklerin ayrımı, ölçümün hangi durumlarda yapılabileceği gibi kısmi noktalarda benzer kaygıları taşıyor görünürler. Ancak son değerlendirmede, Kant manifoldu matematiksel bilme sırasında çeşitli işlemlere (sentezlenme, sunulma, kavranma) maruz kalmak suretiyle bir anlamda bilgi kuramının malzemesiyken, Riemann için manifold daha çok fiziksel geometrinin üzerinde işlem yaptığı biçimlendirilmemiş noktalar yığındır. Riemann "manifold" kavramının kendisini Johann Friedrich Herbart ve Gauss'tan etkisi ile biçimlendirmiş ve n boyutlu geometrilerin imkanını gösterme işinde kavramı daha çok bir matematikçinin gözüyle biçimlendirmiştir.

Riemann'ın doğa felsefesinin manifold kavramı merkezli geometrisi Herbart'ın genel kavramlarla çalışma ve doğanın altında yatan gerçekliğin kavramsal olarak netleştirilmesi önerisinin ve Gauss'un eğrilik kavramının ve diferansiyel geometrisinin sonsuz boyuta taşınması sonucu ortaya çıkmıştır. Riemann'ın asıl odaklandığı nokta, uzayı kavrama ve geometri yapma pratiğinde Kant'ın iddialarının haklı olup olmadığını tartışmak değil, eski düşünce geleneğini terk eden yepyeni bir düşünme tarzı ortaya koymaktır. Riemann

kendisinden önceki geleneğin “sınırlandırıcılığından” sıyrılmayı hedeflemektedir (Ferreiros, 2007, s.43-45; Çevik, 2015b). Ona göre bu ancak bilimsel araştırmalarımıza bize tanıdığı olanaklarla birlikte gelenekten sıyrılma fırsatını sunabilecek genel kavramlarla işe başlanabilirse mümkündür. *Habilitationsvortrag*’ın sonundaki şu sözler Riemann’ın bakış açısını net bir şekilde gösterir:

Genel kavramlardan yola çıkan bunun gibi soruşturmalar ancak şunları kesin bir şekilde gösterir: bu tür çalışmalar fazla sınırlandırıcı kavramlar tarafından sekteye uğratılmaz ve şeylerin arasındaki bağlantıları anlamadaki gelişmeler geleneksel önyargılar tarafından engellenemez (Riemann, 1929, s.423).

Alıntıda Riemann, yönteminin ve geometri felsefesinin mimarisini sunmaktadır. Riemann kendisine verili olmayan ve ancak kurularak temsil edilmesinin mümkün olduğu bir başlangıç noktası seçer. Bu başlangıç noktası manifold kavramı ile belirlenir. Manifold kavramı ile uzayın kavranmasında Öklidyen geometrinin ya da üzerinde kurulması mümkün diğer geometrilerin herhangi birini ön plana çıkartılmaz. Bu şekilde Riemann bizim aletlerimizle yaptığımız ölçümlerle kıyaslandığında çok büyük ya da çok küçük uzaylarda farklı geometrilerin geçerli olabileceğini gösterir. Bu anlamda manifold kavramı ona uzayı modelleyeceğimiz geometrilerin çok fazla sayıda olabileceğini görmenin imkanını verir. Böylece Riemann uzayın doğasını geometrilerin çokluğuyla açıklayabilecektir; yani Riemann’ın geometri felsefesi bu anlamda *çoğulcudur*. Riemann’ın odak noktası doğayı fizik, matematik ve felsefe ile beraber kavramaktır. Bu kavrama girişiminde Riemann kendisini uzayın gerçekliğine daha fazla yaklaştıracak bir geometri anlayışı için, halihazırda bulunan Öklidyen ya da Öklidyen olmayan diğer geometrileri (örneğin Bolyai ve Lobachevksy tarafından kurulan Hiperbolik geometri) bir tarafa bırakmaya hazırdır.

Riemann uzayın ve geometrinin doğası ile ilgili kendi zamanına kadar uzanan geleneğin çalışma biçimini eleştirirken kullandığı *a priori* kavramından, kendi araştırma programının temel kavramı olan manifold kavramının çerçevesini oluştururken uzak kalmaya çalışmış ve olabildiğince gözlemin sınırlarının için geometriye kıyasla, de kalarak doğayı anlamaya çalışmıştır (Ferreiros, 2005, s.3). Riemann’ın odaklandığı mesele Öklidyen metriğin geçerli olduğu uzayın geometrisinin kabullerinin sorgulanmasına dayanmaktadır. Bu amaçla Riemann’a göre geometrinin temelinde yatacak olan kavram, kendisinin *gerekli ve olanaklı*

olma durumunun temsil edilebilmesine olanak tanıyacak nitelikte olmalıdır. Çünkü Riemann'a göre, örneğin Öklid geometrisinde 'uzayda inşa' işlerinde kullanılacak kavramlar, aksiyom formunda tanımsal düzeyde verilmiştir. Bu biçimiyle söz konusu kavramlar Riemann'ın araştırma programında empirik bir soruşturmanın konusu olamazlar.

Uzayı *manifold* olarak tanımlamak, Riemann'ın anladığı şekliyle kaynağı *a priori* olması gereken *zorunlu* olanın değil, deneyin sınırlarında *olanaklı* olanın incelenmesinin yolunu açar. Riemann'ın geometri felsefesinde Öklidyen geometrinin belirsizliğinden arınabilmek, yani geometrik inşalarda başvuru olan tanım ve postulatların *a priori* zorunlu olduğu fikrinden kaçınmak için geometrik aksiyomların doğasında olan *zorunluluk*, *olanaklı* olanla yer değiştirir. Olanaklar manifold kavramı aracılığıyla sağlanır. Uzay, manifold olarak tanımlandığında üzerine farklı metrik sistemler tanımlanabilir. Bu metrik sistemlerin ne derece geçerli olduğu empirik gözleme açıktır. Uzaydaki yapılaştırmalardan bahsettiğimiz durumda geometrinin aksiyomlarındaki *a priori zorunluluk* bir mesele olarak belirir. Diğer yandan Riemann önce *uzayı yapılaştırmayı* önererek, yani onu *manifold* olarak tanımlayarak henüz bir aksiyom seti, dolayısıyla bir geometri önermez. Aksine, Riemann önce uzayın tanımını değiştirir. Ancak bu tanım ontolojik düzeyde kalmaz, zira uzayın yapısının ne olduğu sorusu artık bu düzeyden sonra aksiyomların doğasıyla değil, gözlemin sınırları içindeki noktasal davranışla, ölçüm için kabul ettiğimiz metriğin empirik olarak sorgulanmasıyla deneysel bir hal alır. Riemann uzam özellikleri ile metrik ilişkileri ayırır ve metrik ilişkileri belirlemeye izin verecek koşullar empirik olarak tespit edilebilir.⁸

5. Sonuç

Riemann ile Kant'ın büyüklük kavramsallaştırmaları üzerinden karşılaştırılmaları, ikisinin uzayı ve geometriyi farklı paradigmalardan ele aldıklarını ortaya çıkarmaktadır. Kant, uzayı zaman ile birlikte görünün saf formu olarak konumlandırır. Buna göre, fiziksel uzay üç boyutludur, geometrinin önermelerinin sentetik *a prioridir*. Onun *manifold*, *quanta* ve *quantitas* kavramlarını kullanışı da bu yaklaşıma göre biçimlenmiştir. Öte yandan Riemann'ın asıl hedefi, bir aksiyomatik sistem ortaya koymak olmadığından, geometrinin önermelerinin doğası ile çok fazla ilgilenmemiş, görülen uzayın yalnızca bir örnek olduğunu, fiziksel uzay görüşüne

⁸ Riemann'ın geometri felsefesinin bir analizi ile ilgili bkz. (Çevik, 2015a)

başvurmaksızın farklı boyutların geometrilerinin kurulabileceğini ve böyle bir çalışmanın *manifold* kavramı temelinde yapılabileceğini göstererek uzay ve geometri öğretisine ilişkin belki de en özgün ve olanakları zengin düşünüş biçimini ortaya koymuştur.

Riemann uzayı *manifold* olarak ele alır. Söz konusu öneri, uzay ve geometriye dair soruların ve yanıtların değişmesine neden olmuştur. Riemann uzay ve geometri bilginizin dış dünyanın bilgisine denk düşmesinde özellikle *fiziksel* geometrinin ne şekilde işleyebileceğini aksiyomlar üzerinden değil, merkeze revizyona açık temel bir kavram olan manifoldu alarak göstermiştir. Söz konusu kavram, uzayın doğası ve statüsü meselesinin çerçevesini değiştirerek, yani *uzaydaki yapısallaştırmalardan önce uzayı yapısallaştırmanın yolunu önererek*- uzayın yeni ve farklı bir düzlemde bilgi kuramsal bir hesabının da verebilmesine olanak tanımaktadır.

KAYNAKÇA

Çevik, A. D. (2015a) “Herbart’ın Geometri Felsefesi ve Riemann Geometrisi Üzerindeki Etkisi”, *Dört Öge*, 7, 105-118.

Çevik, A. D. (2015b) “Riemann’ın Geometri Felsefesinde Uzay Görüşünün Yeri Var mı?”, *Beytulhikme: An International Journal of Philosophy*, 5 ,1,81-94.

Çevik, D. (2023a). “Uzay ve Geometrinin Doğası Üzerine Titanların Mücadelesi: Newton, Leibniz, Kant ve Gauss”, *Septem Artes*,1, 29-42.

Çevik, D. (2023b) “Hermann Grassmann’ın Uzam Teorisinin (“Die Ausdehnungslehre”, 1844) Kökenleri Üzerine.” İçinde *XI Mantık Çalıştayı ve Sempozyumu Bildiri Kitabı*, editörler Şafak Ural, Yavuz Unat, Ömer Fatih Tekin, Halil İbrahim Çetres, 8-17. Kastamonu: Mantık Derneği Yayınları.

Ferreiros, J. (2005) “Dogmas and changing Images of Foundations”. *Philosophia Scientiae*, 27-42.

Ferreiros, J. (2007) *Labyrinth of Thought: a History of Set theory and Its role in Modern Mathematics*. Basel, Switzerland; Boston: Birkhauser.

Friedman, M. (1992) *Kant and Exact Sciences*. Harvard University Press.

Kant, I. (1998) *Critique of Pure Reason*. Çeviren ve Editör: P. Guyer, AW Wood. Cambridge: Cambridge University Press.

Kant, I. (2002) *Prolegomena*. Çeviren İoanna Kuçuradi-Yusuf Örnek, Türkiye Felsefe Kurumu, Ankara.

Monastyrsky, M. (1987) *Riemann, Topology, and Physics*. Boston: Birkhauser, 1987.

Morales, A. (2019) “From Grassmann, Riemann to Husserl: a brief history of concept of Manifold”. *Meta: Research in Hermeneutics, Phenomenology, and Practical Philosophy*, Vol XI 2, 473-500.

Ohshika, K. (2017) “The Origin of the Notion of Manifold: From Riemann’s Habilitationsvortrag Onward.” İçinde *From Riemann to Differential Geometry and Relativity*, editörler Ji L., Papadopoulos A., Yamada S., 295-309. Springer.

Plotnitsky, A. (2017) “Comprehending the Connection of Things: Bernhard Riemann and the Architecture of Mathematical Concepts.” İçinde *From Riemann to Differential Geometry and Relativity*, editörler Ji L., Papadopoulos A., Yamada S., 329-363. Springer.

Riemann, B. (1929) “On the Hypotheses Which Lie at The Foundations of Geometry.” İinde, *A Source Book in Mathematics*. ev. David Eugene Simith, 411-425. New York: McGraw-Hill Book Co.

Sutherland, D. (2004) “The Role of Magnitude in Kant’s Critical Philosophy”, *Canadian Journal of Philosophy*, 34, No:3, 411-442.

Torretti, R. (1978) *Philosophy of geometry from Riemann to Poincare*. Dordrecht: Reidel: D. Reidel Publishing Company.

Torretti, R. (1990) *Creative Understanding: Philosophical Reflections on Physics*, Chicago: University of Chicago Press.

Dursun, Y. (2004) *Felsefe ve Matematikte Analitik/Sentetik Ayrımı*, Ankara: Elips Kitap.

Boi, L. (1992) “The “revolution” in the Geometrical Vision of Space in the Nineteenth Century, and the Hermeneutical Epistemology of Mathematics” iinde, ed. D. Gillies, *Revolutions in Mathematics*, ss.183-208. New York: Oxford Science Publications, The Clarendon Press, Oxford University Press.