ETHOS: Felsefe ve Toplumsal Bilimlerde Diyaloglar
ETHOS: Dialogues in Philosophy and Social Sciences

Temmuz/July 2019, 12(2), 44-68
ISSN 1309-1328

DAVID HILBERT'İN BİÇİMSELCİ MATEMATİK FELSEFESİNDEN RUDOLF CARNAP'IN ANALİTİK FELSEFESİNE: FORMALİZM VE DOĞRULANABİLİRLİK ÖLÇÜTÜ

[From David Hilbert's Philosophy of Mathematics to Rudolf Carnap's Analytic Philosophy: Formalism and the Verifiability Criterion]

Ali Bilge ÖZTÜRK

Dr. Öğretim Üyesi, Akdeniz Üniversitesi, Felsefe Bölümü
alibilgeozturk@akdeniz.edu.tr

ÖZET

Çağdaş felsefe, matematik dünyasındaki gelişmelerin felsefe dünyasına etkide bulunduğu önemli örneklerle doludur. Bu çalışmada onlardan biri konu edilmektedir. Söz konusu örnek çağdaş matematiğin öncülerinden David Hilbert'in biçimselci matematik felsefesinin, Viyana Çevresi'nin başlıca düşünürlerinden Rudolf Carnap'ın analitik felsefesi üzerindeki etkisidir. Çalışmanın iddiası, Carnap'ın (1) hoşgörü ilkesinin, (2) doğrulanabilirlik ölçütünün ve (3) analitik metafelsefesinin, Hilbert'in biçimselci matematik felsefesinden bağımsız olarak anlaşılamayacağıdır.

Anahtar Sözcükler: Matematik felsefesi, metamatematik, metamantık, metafelsefe, analitik felsefe, kanıt kuramı, biçimselcilik.

Temmuz/July 2019, 12(2), 44-68
ISSN 1309-1328

ABSTRACT

Contemporary philosophy is full of important examples in which the developments in the world of mathematics influence the world of philosophy. This study concerns an important one of them. This example is the influence of David Hilbert, one of the pioneers of contemporary mathematics, on the analytical philosophy of Rudolf Carnap, one of the main philosophers of the Vienna Circle. The study asserts that Carnap's (1) principle of tolerance, (2) verifiability criterion and (3) analytic metaphilosophy cannot be understood independently of Hilbert's formalist philosophy of mathematics.

Keywords: philosophy of mathematics, metamathematics, metalogic, metaphilosophy, analytic philosophy, proof theory, formalism.

Temmuz/July 2019, 12(2), 44-68
ISSN 1309-1328

Giriş

Mantık ve matematik felsefesi geçtiğimiz yüzyılda felsefenin başlıca soruşturma türlerindendi ve içinde yaşadığımız yüzyılda da önemini koruyacağını bekleyebiliriz. Bunun bir nedeni elbette bu çağın gereklilikleriyle ilgili. Günümüzde çeşitli otomasyon sistemlerinin ve robot teknolojilerinin gündelik yaşama daha fazla dahil olduğu ve hatta dördüncü bir endüstri devriminden dahi söz edildiği bir döneme girilmekte. Dolayısıyla *yapay zekalar*, *otomatikleştirilmiş problem çözümü* ve kullandığımız mantıksal ve matematiksel yöntemlere güvenimiz gibi bir takım konuların da değeri artmaktadır.

Diğer taraftan söz konusu alanların tarihsel ve pedagojik anlamda da özel bir değeri bulunmaktadır. Şöyle ki, esasta bütün düşünce tarihinde mantık, matematik ve felsefe çevreleri karşılıklı ilişkiler içerisinde bulunmuştur. Hatta bu ilişkiler geçtiğimiz yüzyılda öyle yoğun olmuştur ki mantık ve matematik alanlarındaki gelişmeleri ve bu gelişmelerden ortaya çıkan çeşitli felsefi yaklaşımları pedagojik olarak ihmal etmek, çağdaş felsefenin önemli bir bölümünü de karanlıkta bırakmak anlamına gelir. Mantık ve matematik felsefesi soruşturmaları sırf bu nedenle dahi dikkate alınmayı hak etmektedir.

Okuduğunuz bu çalışmada da yukarda sözü edilen duruma dair sayısız güzel örnekten biri konu edilmektedir. Bu örnek ise ünlü matematikçi David Hilbert'in biçimselci (İng. *formalist*) matematik felsefesi ve kanıt kuramı yaklaşımının, Rudolf Carnap'ın çeşitli felsefi sorunlara yönelik çözüm önerilerinin oluşumundaki rolüdür. Kısaca bu çalışmada savunulan iddia, Hilbert'in düşüncelerinin Carnap'ın (1) ünlü *hoşgörü ilkesi*nin (İng. *principle of tolerance*) formülasyonunda, (2) Carnap'ın bilimsel kuramların mantıksal analizi fikrinde ve (3) Carnap'ın felsefenin tanımı ve bilime göre konumuna dair görüşlerinde kurucu bir role sahip olduğudur. Eğer bu rol anlaşılmazsa Carnap'ın analitik felsefesinin önemli bir kısmı karanlıkta kalır.

Çalışma bu noktayı göstermeye yönelik dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde David Hilbert'in bir "matematik bilimi" oluşturma yolunda, biçimselci matematik felsefesini ve kanıt kuramı yaklaşımını nasıl geliştirdiği genel hatlarıyla incelenmektedir. Böylece Hilbert'in yaklaşımından Carnap'ın felsefesine miras kalan unsurlar belirginleştirilmektedir. Diğer üç bölümde ise Hilbert'ten Carnap'a miras kalan bu unsurların yukarda üç madde halinde sözü edilen görüşlerin oluşumundaki kurucu rolü belirginleştirilmektedir. Bu yolla mantık ve matematik

Temmuz/July 2019, 12(2), 44-68
ISSN 1309-1328

dünyasındaki gelişmeleri anlamanın, çağdaş felsefi yaklaşımlar hakkında nasıl daha geniş bir kavrayış kazandırabileceğinin de bir örneği sunulmaktadır.

I. Hilbert'in biçimselci matematik felsefesi ve ispat kuramı

19. yüzyılın ikinci yarısı, matematik dünyasında bazı büyük dönüşümlere işaret etmektedir. Bu dönüşümlerden belki de en önemlisi *uygulamalı matematik* ile *saf matematik* arasındaki ayrımın iyice belirgin hale gelmesidir. Buna paralel başka bir dönüşüm ise uygulamalı matematik eğilimi gün geçtikçe zayıflarken, *saflaşma* eğiliminin güçlenmesidir. İşaret edilen bu sürece dair en iyi analizlerden biri matematik tarihçisi Morris Kline tarafından sunulmuştur. Kline'ın tespit ettiği gibi:

> 19. yüzyılın sonuna doğru matematiğin aksiyomlarının keyfi olduğu görüşü yaygınlaştı. Aksiyomlar yalnızca sonuçlar türetmenin temeli haline gelecekti. Aksiyomlar artık içerdikleri kavramlar hakkındaki doğrular olmadığından dolayı, artık bu kavramların fiziksel anlamlarının bir önemi kalmamıştı. (…) Böylece kavramlar dahi fiziksel dünyadan ayrılmıştır. 1900 yılı civarında matematik gerçeklikten kopmuştur; açık ve geri dönülemez şekilde doğa hakkında doğruluk iddiasını kaybetmiş ve anlamsız şeyler hakkında rastgele aksiyomların zorunlu sonuçlarının takibine dönüşmüştür" (1972, s. 1035). (…) "Matematiğin doğa hakkında doğruluklar olduğu şeklindeki iki bin yıllık kanaat yok olmuştur. (…) Matematiğin doğanın çalışılmasıyla doğrudan veya nihai olarak herhangi bir ilgi taşımayan keyfi yapılarla uğraşması gerektiği şeklindeki görüşün aşamalı yükselişi ve kabul edilişi, bugün saf ve uygulamalı matematik olarak bilinen bölünmeye yol açmıştır (1972, s. 1036).

Böylece 19. yüzyılın sonlarına doğru matematiğin gerek temel kavramlarıyla, gerek aksiyom ve teoremleriyle, yani yargılarıyla, *dünya hakkında doğrular sunan uygulamalı bir bilim* olduğu şeklindeki kavrayış aşamalı şekilde zayıflamıştır. Bunun yerine, matematikte doğa bilimlerinde uygulama bulması hiç de zorunlu olmayan keyfi ve soyut matematiksel nesne ve yapıların da araştırılabileceği fikri, yani saflaşma eğilimi, aşamalı şekilde güç kazanmıştır.

İşaret edilen gelişmenin önemli bir sonucu çok eski ve köklü bir felsefi sorun olan ünlü *matematiğin temelleri* sorununun 19. yüzyılın sonuna doğru matematik dünyasında hiç olmadığı kadar hararetlenmeye başlamasıdır. Bu dönemle birlikte hem matematikçiler hem de matematiğin

Temmuz/July 2019, 12(2), 44-68
ISSN 1309-1328

temelleri sorununa ilgi duyan mantıkçı ve filozoflar, matematiğe temel olan kavram ve yargıların kökeninin ne olduğu ve nasıl tanımlanabilecekleri, matematiğe temel olan yöntemlerin ne olduğu, matematiğin çeşitli alanlarını bir araya getirip toparlayabilecek genelliğe sahip kuramların nasıl geliştirilebileceği gibi bazı sorunlara odaklanmaya başlamıştır. Öyle ki bu nokta o dönemlerle birlikte yayınlanmaya başlanan pek çok yapıtın adında dahi kendini belli eder. Örneğin Gottlob Frege'nin ilk olarak 1884 yılında yayınlanan *Aritmetiğin Temelleri* (Alm. *Die Grundlagen der Arithmetik*) yapıtı, David Hilbert'nin 1899'da yayınlanan *Geometrinin Temelleri* (Alm. *Grundlagen der Geometrie*) yapıtı, Bertrand Russell'ın 1903 yılında yayınlanan *Matematiğin İlkeleri* (İng. *The Principles of Mathematics*) yapıtı ve ek olarak Russell'ın Alfred North Whitehead ile birlikte kaleme aldığı *Principia Mathematica* adlı yapıtı bu bağlamda dikkat çeken bazı yapıtlardır.

Diğer taraftan matematikte artan saflaşma eğilimi o dönemde *matematiğin temelleri* tartışmasını hararetlendiren tek neden değildir. Üzerinde durulması gereken diğer bir önemli neden ise 19. yüzyılın sonlarında naif küme kuramında bulunan ve ardından büyük tartışmalara yol açan bazı çelişkilerdir. Bu çelişkilerin etkisi öyle büyük olmuştur ki matematikçi David Hilbert'in de belirttiği gibi:

> Onlar, adlandırıldığı şekliyle, küme kuramının paradokslarıydı. Özellikle [Ernst] Zermelo ve [Bertrand] Russell tarafından bulunan bir çelişki ünlendikten sonra matematik dünyasında düpedüz facia etkisi yarattı. (…) Tepki öylesine şiddetliydi ki matematikteki en yaygın ve verimli kavramlar ile en temel ve önemli çıkarım biçimleri tehdide uğradı ve kullanımları yasaklanacaktı (1967a [1925], s. 375).

Böylece bu çelişkilerin ünlenmesiyle, matematikte artan saflaşma eğilimi yüzünden zaten hararetlenmiş olan *temeller tartışması* yeni bir boyut daha kazanmıştır. Matematikçiler yalnızca matematiğe temel olan kavram ve yargıların kökeninin ne olduğu, matematiğin çeşitli alanlarını bir araya getirecek genellikte kapsamlı kuramların nasıl geliştirilebileceği gibi sorunları değil, aynı zamanda çelişkilerden uzak güvenilir bir matematiğin nasıl kurulabileceği, matematikte daha fazla kesinliğin nasıl sağlanabileceği, buna uygun yöntemlerin ne olduğu gibi sorunları da tartışmaya başladı. Matematiğin temellerini güvence altına almaya yönelik yapılan bu tartışmalar açıkça 20. yüzyılın ortalarına kadar matematik felsefesinin ana gündemini oluşturdu.

Tartışmaların geneline bakıldığında, o dönemde bu tür sorunların hepsine bir çözüm bularak matematiğe sağlam temeller bulma gayretiyle matematik camiası içinden gelişen üç büyük temelci

Temmuz/July 2019, 12(2), 44-68
ISSN 1309-1328

yaklaşım kendini göstermektedir. Bunlardan birincisi Gottlob Frege ve Bertrand Russell'ın *mantıksalcı* yaklaşımı, ikincisi Jan Brouwer'in öncülüğünü yaptığı *sezgici* yaklaşım ve üçüncüsü David Hilbert ile takipçilerinin sürdürdüğü *biçimselci/formalist* yaklaşımdır. Bu yaklaşımların yukarda işaret edilen sorunlara dair sundukları çözümlerin hepsinin geniş bir analizini yapmak, okuduğunuz bu çalışmanın kapsamı dışında kalmaktadır. Ancak bu makalenin konusu itibariyle David Hilbert'in biçimselci matematik felsefesine değinmek ve bu yaklaşımın bazı önemli unsurlarını açık kılmak gerekmektedir.

David Hilbert 20. yüzyılın ilk yarısının en etkili ve ünlü birkaç matematikçisinden biriydi. Matematiğin temellerini ise matematiğin doğa bilimlerindeki başarılı uygulamalarında değil, *saf* matematik içinde aramaktaydı. Bu nokta özellikle onun matematikte aksiyomların rolü üzerine görüşlerinde oldukça belirgindir. Hilbert'e göre matematikte aksiyomların rolü, eskiden safça düşünüldüğü gibi "temel doğrular" olmak değil, "modern" aksiyomatikte uzun bir süredir kabul edildiği gibi yalnızca matematiksel "kavramlar arasındaki belirli karşılıklı ilişkileri" yapılandırmaktır (1967a [1925], s. 381).

Bu anlayış temelinde Hilbert'in hedefi, matematiğin temellerine koyulması gereken kuramın bizzat matematik içi gereklilikler göz önünde bulundurularak oluşturulabilmesidir. Bu öyle bir kuram olmalıdır ki (1) güvenilir, yani çelişkilerden arınmış tutarlı bir kuram olmalıdır (1967b [1927], s. 471-472) ve (2) Hilbert'in "her yeni kuramın son sınavı, kuramın yanıt vermek için özel olarak geliştirilmediği önceden var olan soruları yanıtlamadaki başarısıdır" (1967b [1927], s. 472) sözünden de anlaşılabileceği gibi, geçmişte yanıtlanmayan matematiksel sorunları da çözüme kavuşturabilmelidir. Kısaca Hilbert'in nihai hedefi, matematiğin geçmişten beri gelen kesinliğini koruyan, hatta bu kesinliği en üst mertebeye çıkaran ve bunu yaparken matematikte çözülmemiş bir sorun bırakmayan genel bir kurama ulaşarak matematiğin temellerini güvence altına almaktır.

Hilbert'in *biçimselci* matematik felsefesi ve *kanıt kuramı* ise yukarda sözü edilen hedefe nasıl ulaşılabileceği konusunda Hilbert'in kendi yaklaşımını ifade etmektedir. Şimdi biçimselci matematik felsefesini daha geniş şekilde anlayabilmek için Hilbert'in, kendi yaklaşımını nasıl sunduğunu inceleyelim:

> Matematiğe bir temel sağlamaya yönelik olarak, tam olarak kanıt kuramı olarak adlandırabileceğim bu yeni yolla önemli bir hedef peşindeyim; çünkü her matematiksel önermeyi somut bir şekilde ortaya koyulabilecek ve açık bir şekilde türetilebilecek birer formüle çevirerek, böylece matematiksel tanım ve çıkarımları sarsılmayacakları ve yine de bilimin

Temmuz/July 2019, 12(2), 44-68
ISSN 1309-1328

> bütününün tam bir resmini sunacakları şekilde yeniden biçimlendirerek, matematiğin temellerine dair bütün sorunları, şu an teşkil ettikleri haliyle, bir defada ve tamamen ortadan kaldırmak istiyorum (1967b [1927], s. 465).

Böylece açıkça görülebileceği gibi Hilbert'in biçimselci yaklaşımına göre, matematiğin temellerini güvence altına alacak ve böylece matematiğin temelleri tartışmalarını sona erdirecek şey, matematiği oluşturan yargıların ve bu yargılardan yola çıkarak yapılan çıkarımların/kanıtlamaların "somut bir şekilde ortaya koyulabilecek ve açık bir şekilde türetilebilecek" bir formüller dizisine dönüştürülmesidir. Hilbert'in kanıt kuramının özündeki fikir bu olup, söz konusu dönüşüm şu iki adımda gerçekleştirilmelidir:

(1) Matematiğin temeline koyulmaya aday olan kuramın, yani aksiyomlar kümesinin ve bu aksiyomlardan çıkacak teoremlerin *biçimsel bir dil çerçevesi* içinde ifade edilmesi. Hilbert'in kendisi bu noktayı şöyle ifade eder: "Matematiği oluşturan bütün önermeler formüllere dönüştürülür; böylece matematik (…) bir formüller envanterine dönüşür" (1967b [1927], s. 465).

(2) Kuram bir defa biçimselleştirildiğinde, bu kuramdan teorem türeteceğimiz mantığın veya Hilbert'in ifadesiyle "düşünce tekniğinin" de biçimsel bir dil çerçevesi içinde ifade edilmesi (1967b [1927], s. 475).

Sonuç olarak Hilbert'in ulaşmaya çalıştığı nokta, matematiksel kanıtlamalarımızın hepsini aksiyomatik biçimsel bir sistem veya biçimsel bir kalkülüs içinde gerçekleştirmektir. Daha açık bir ifadeyle, matematiği, kanıtlamaların bir takım simgesel ifadelerden, yine simgesel çıkarım kuralları kullanarak yeni simgesel ifadelerin türetilmesiyle yapıldığı bir tür simge manipülasyonu veya simge dönüştürme oyununa çevirmektir.

Diğer taraftan burada şöyle bir soru ortaya çıkmaktadır: Matematiksel aksiyomları ve onlardan teorem türeteceğimiz mantığı biçimselleştirmenin ve böylece matematiği bir simge dönüştürme oyununa dönüştürmenin matematiğin temellerini güvence altına alma yolunda bize ne türden yararlar sağlamasını umabiliriz? Bu soruya Hilbert'in yanıtı şu şekildedir:

> Bu formül oyunu matematik biliminin düşünce içeriğinin tamamını tek tip bir şekilde ifade edebilmemizi sağlar ve aynı zamanda onu tikel önermeler ile olgular arasındaki karşılıklı ilişkileri açık kılacak şekilde geliştirir. (…) doğası gereği bir kuram bazı tartışmaların ortasında

Temmuz/July 2019, 12(2), 44-68
ISSN 1309-1328

> *sezgilere veya anlamlara geri dönmemize gerek bırakmayacak* bir şeydir. Fizikçinin bir kuramdan talep ettiği şey tam olarak, tekil önermelerin doğa yasaları veya hipotezlerinden, daha öte hususlar ileri sürülmeden, *yalnızca çıkarım, dolayısıyla saf formül oyunuyla* türetilebilmesidir (1967b [1927], s. 475; italik vurgu bana aittir).

Görülebileceği gibi Hilbert'e göre matematiği, daha özelde matematiğin dilini aksiyom ve kanıtlarıyla birlikte biçimselleştirmek, "yalnızca çıkarım", dolayısıyla "saf formül oyunuyla" sürdürülebilecek, böylece "sezgilere" ve "anlamlara" başvurmaya gerek bırakmayacak bir matematik metodolojisini beraberinde getirir. Eğer Hilbert bu konuda haklıysa böyle bir metodolojide sezgilere başvurmamız gerekmez; çünkü matematiksel uslamlamayı oluşturan bütün uslamlamalar artık açık birer biçimsel kurala dönüşeceği için, hesabını biçimsel olarak veremeyeceğimiz bir uslamlama kullanmak zorunda kalmayız. Ek olarak matematiksel sorunların çözümü yolunda matematiksel terimlerin anlamlarına da başvurmamız gerekmez; çünkü böyle bir metodolojide matematiği oluşturan kavramlar, anlamlarına göre değil, aksiyomatik biçimsel sistem içindeki biçimsel davranışlarına göre şekilleneceğinden dolayı matematikteki herhangi bir kanıtlamanın geçerliliğini tartışırken şu tür tartışmalar yapmak zorunda kalmayız: "Bu kanıtlama geçerlidir çünkü irrasyonel sayı sözcüğünün anlamından şu ve bu çıkar" veya "bu kanıtlama geçersizdir çünkü sonsuz sözcüğünün anlamından şu veya bu çıkmaz".

Dahası bu dönüşüm, Hilbert'in iddiasına göre, matematiğin daha da bilimsel bir alan haline gelmesini sağlayacaktır. Çünkü böyle bir metodoloji, matematiği "keyfilikten" ve "öznellikten" uzaklaştırarak, daha "nesnel" bir araştırma sahası haline getirecektir:

> Kanıt kuramımın temel fikri, anlayış etkinliğimizi betimlemekten, düşüncemizin işleyişini fiilen belirleyen kuralların bir tutanağını yapmaktan başka bir şey değildir. Düşünmek, ilginçtir ki, konuşma ve yazmaya paraleldir: İfadeler oluştururuz ve onları birbiri ardına dizeriz. Eğer gözlemlerin ve olguların herhangi bir bütünü ciddi ve kapsamlı bir soruşturma nesnesi yapılmayı hak ediyorsa o da budur; çünkü, her şeyden önce *bizi keyfilikten, duygusallık ve alışkanlıklardan kurtarmak ve (...) öznellikten korumak* bilimin bir parçasıdır (1967b [1927], s. 475; italik vurgu bana aittir).

Özetle bütün bu görüşler toparlandığında, Hilbert'in biçimselci matematik felsefesi, bir "kanıt kuramı", yani matematiksel kanıtlamaların yapılması ve denetlenebilmesine dair *metamatematiksel*

Temmuz/July 2019, 12(2), 44-68
ISSN 1309-1328

bir yöntem önermektedir. Bu yönteme göre matematiğin temellerine koyulacak olan aksiyomlar ve bu aksiyomlardan teorem türetmemizi sağlayacak mantık kuralları biçimsel/yapay bir dil içinde ifade edilmelidir. Dolayısıyla şimdiye kadar "olağan dil aracılığıyla aktarılmış olan (…) matematik bilimi", yerini biçimsel/yapay bir dil çerçevesi içinde soruşturulan bir matematik bilimine, yani bir matematiksel formüller envanterine bırakır (1967a [1925]; s. 381). Matematiğin temellerinin ve matematiksel kanıtlamaların olağan bir dil içinde değil ancak biçimsel bir dil çerçevesi içinde çalışılması, matematiği öznellik, keyfiyet, sezgilere başvuru gibi unsurlardan kurtaracaktır. Bu süreç matematiğin temellerini güvence altına almanın önemli bir basamağıdır.

Şimdi, bu genel kuramsal açıklamalardan sonra Hilbert'in biçimselciliği hakkında daha fazla açıklık ve kavrayış sağlamak için, söz konusu yaklaşımının nasıl bir matematiği öngördüğü örneklendirilmeye çalışılacaktır. Bu amaçla öncelikle matematiğin temel yapılarından biri olan doğal sayılar kümesine odaklanalım:

N: {0, 1, 2, 3, … }

Bu kümeyi karakterize edebilecek şekilde doğal dilde pek çok yargı oluşturabiliriz. Örneğin:

1. Doğal sayılar, birbirini takip eden öğelerden oluşan bir dizi biçiminde bir kümedir.
2. Bu dizideki her öğeden sonra, bu öğenin ardılı diyebileceğimiz başka bir öğe bulunmaktadır.
3. Bu dizide aynı öğe hiçbir zaman iki farklı öğenin ardılı değildir.
4. Bu dizide hiçbir sayının ardılı olmayan bir öğe vardır.
5. Bu dizide bir özellik başlangıç öğesi için doğruysa ve bu özelliğin belirli bir öğe için doğru olması, ardılı için de doğru olmasını gerektiriyorsa bu özellik dizinin bütün öğeleri için doğrudur.

Diğer taraftan yukarda da belirtildiği gibi Hilbert'in teklif ettiği şey, bu tür yargıların doğal/olağan dilden uzaklaştırılarak, belirli bir biçimsel/yapay dil çerçevesi içerisinde çalışılması. Bunu sağlamanın ise pek çok yolu bulunmaktadır. Örneğin, günümüz okurları açısından anlaşılması görece kolay olacağı için, *birinci düzey mantığın* (İng. *first-order logic*) sentaksının sınırlarında kalarak bu yargıları aşağıdaki şekilde ifade ederek biçimselleştirebiliriz:

1. $(\forall x)A(x) \neq 0$

Temmuz/July 2019, 12(2), 44-68
ISSN 1309-1328

2. $(\forall x)(x + 0 = x)$
3. $(\forall x)(x \bullet 0 = 0)$
4. $(\forall x)(\forall y)(A(x) = A(y) \rightarrow x = y)$
5. $(\forall x)(\forall y)(x + A(y) = A(x + y))$
6. $(\forall x)(\forall y)(x \bullet A(y) = (x \bullet y) + x)$

   Her Φ özelliği için:

7. $(\Phi(0) \wedge (\forall x)(\Phi(x) \rightarrow \Phi(A(x)))) \rightarrow (\forall x)\Phi(x)$

Bu yolla günümüz matematiksel mantık literatüründe *birinci düzey Peano aritmetiği* (İng. *first-order Peano arithmetic*) veya kısaca Peano aritmetiği olarak bilinen bir yargı kümesine ulaşmış oluruz (Cook, 2009, s. 218). Şimdi, bu yargı kümesini dikkatle inceleyelim.

Öncelikle burada yedinci yargı bir aksiyom değil, *aksiyom şeması*dır. Yani bu yargı her "Φ" özelliği için yeni bir aksiyom oluşturulabileceğini ileri süren bir kural bildirmektedir. Bu nokta temelde birinci düzey mantığın sentaktik sınırlılıklarından kaynaklanan bir durum ve okuduğunuz bu çalışma açısından önemli bir ayrıntı değil.

Diğer taraftan bu yargılardan ilk üçünde önemli bir ayrıntı bulunmaktadır: Bunlar dikkatle incelendiğinde görülecektir ki bu üç yargı *örtük/gizli/üstü kapalı* biçimde sıfır sayısını tanımlamaktadır. Çünkü bu yargılar dikkatle incelendiğinde, doğal sayılar kümesindeki sıfır sayısının özelliklerini biçimsel olarak ifade ettikleri görülür. Şimdi, burada yapıldığı gibi belirli bir kavramı bu şekilde açıkça değil fakat aksiyomlar yoluyla örtük biçimde tanımlama yöntemi *örtük tanımlama* (İng. *implicit definition*) olarak bilinir ve sonraki bölümlerde görüleceği gibi Rudolf Carnap'ı da oldukça etkilemiş bir tanımlama yöntemidir.

Okuyucunun burada dikkat etmesi gereken ikinci önemli bir nokta, bu yargıların esasta hiçbirinin bir anlama sahip olmamasıdır. Temelde bu yargılar ve onları oluşturan simgeler belirli kurallara göre birleşen veya bir başkasına dönüşen anlamsız simgeler topluluğundan başka bir şey değildir. Bu noktayı anlamak için ise ilk üç ifadeye yeniden odaklanalım. Bu ifadeler "0" simgesi yerine farklı bir simge kullanılarak şöyle de oluşturulabilirdi:

1. $(\forall x)A(x) \neq \spadesuit$
2. $(\forall x)(\spadesuit + x = x)$
3. $(\forall x)(\spadesuit \bullet x = \spadesuit)$

Temmuz/July 2019, 12(2), 44-68
ISSN 1309-1328

Dolayısıyla asıl aksiyomlarda "0" simgesinin kullanılmasının nedeni simgelerin *yorumlanmasını* kolaylaştırmaktan başka bir şey değildir. "0" simgesi, doğal sayılar kümesindeki sıfır sayısını karakterize edecek şekilde yorumlandıktan sonra, kalan bütün sayılar da şöyle bir kuralla ifade edilebilir:

Bir: Sıfırın ardılı: $A0$

İki: Sıfırın ardılının ardılı : $AA0$, vb.

Diğer taraftan daha önce de belirtildiği gibi Hilbert'in biçimselci kanıt kuramı yalnızca matematiğe temel olacak aksiyomların değil, bu aksiyomlardan teorem türetilecek "düşünce tekniğinin", yani mantığın da biçimselleştirilmesini teklif eder. Bu nedenle sisteme birinci düzey mantıkta geçerli olan bütün biçimsel çıkarım kuralları eklenebilir. Örnek olarak bunlardan bazılarını şu şekilde sıralayalım:

1. $(\forall x)\neg\neg(x) \rightarrow (x)$ // Çifte değilleme (İng. *double negation*)
2. $(\forall x)(\forall y)((x \land (x \rightarrow y)) \rightarrow y))$ // *Modus ponens*
3. $(\forall x)(Ax) \rightarrow Aa$ // Tümeli özelleme (İng. *universal instantiation*)

   vb.

Böylece bu yolla geleneksel matematiksel çıkarım veya kanıtlama yapma biçimi, Hilbert'in de ifade ettiği gibi "simgelerin kurallar yoluyla dönüştürülmesine çevrilir" ve "bu yolla biçimsel soruşturmanın naif soruşturmanın yerine geçmesi tamamlanmış olur" (1967a [1925], s. 381). Şimdi, Hilbert'in düşündüğü türden "naif" olmayan, yani "biçimsel" bir matematiksel kanıtlamanın nasıl yapılabileceğini görmek için, basit bir örnek olarak "1+1=2" eşitliğinin birinci düzey Peano aritmetiğinde nasıl kanıtlanabileceğini inceleyelim:

$$\vdash A0 + A0 = AA0$$

1. $(\forall x)(\forall y)(x + A(y) = A(x + y))$ // Beşinci aksiyom
2. $(\forall y)(A0 + A(y) = A(A0 + y))$ // (1, Tümeli özelleme)
3. $A0 + A(0) = A(A0 + 0)$ // (2, Tümeli özelleme)
4. $(\forall x)(x + 0 = x)$ // İkinci aksiyom
5. $A0 + 0 = A0$ // (4, Tümeli özelleme)
6. $A0 + A(0) = A(A0)$ // 3. satırda yerine koyma (İng. *substitution*)
7. $A0 + A0 = AA0$

Temmuz/July 2019, 12(2), 44-68
ISSN 1309-1328

Dikkat edilirse yukardaki çıkarımda yapılan iş, bir takım yargı oluşturma kurallarına göre bir araya gelmiş simgelerden oluşan aksiyomlardan, yine simgesel bazı çıkarım kuralları kullanılarak, belirli bir simgesel yargıya ulaşmaktır. Dolayısıyla Hilbert'in de belirttiği gibi, matematiksel çıkarımı "saf formül oyunuyla" yapmaktır. Ek olarak burada görülebileceği gibi çıkarımı yaparken "bir", "iki" "toplam" gibi sözcüklerin anlamı hiç devreye girmemektedir. Dolayısıyla eğer bir grup kişi bu çıkarımdaki adımların geçerliliğini tartışmak isterse yapmaları gereken şey bu tür sözcüklerin anlamını soruşturmak değil, simgesel kuralların uygun şekilde kullanılıp kullanılmadığını soruşturmaktır. Hatırlanabileceği gibi Hilbert'in iddiası matematiği bu şekilde bir simge manipülasyonu oyununa çevirmenin matematiği "sezgilere ve anlamlara geri dönmekten" ve bu yolla "keyfilik" ile "öznellik" gibi tehlikelerden koruyacak olmasıdır.

Diğer taraftan şunu belirtmek gerekiyor ki David Hilbert'in matematiğin temellerini uygulamalı değil, saf matematik içinde güvence altına almak için önerdiği bu biçimselci yaklaşımı ve metamatematiksel kanıt kuramı, esasta bu kadarla sınırlı değildir. Bu yaklaşım matematiğin temeline koyulacak aksiyom adaylarının seçiminde neye dikkat edileceği, bu aksiyomların birbirleriyle tutarlılığının nasıl kanıtlanabileceği (çünkü Hilbert matematiğin temelleri sorununun ancak tutarlı ve eksiksiz bir biçimsel aksiyom kümesi bulunarak çözülebileceğine inanıyordu), ne tür nesnelerin matematiksel soruşturmanın konusu olabileceği gibi bazı sorunlara da çözüm önerileri sunan çok daha geniş bir yaklaşımdır. Ancak Hilbert'in bu tür sorunlara yönelik geliştirdiği çözümler bu makalenin konusuyla doğrudan ilgili değildir. Bu çalışma açısından önemli olan Hilbert'in, Rudolf Carnap'ı da etkilemiş olan biçimselciliğinin temel fikirleri ve bu fikirlerin hangi gerekçelerle savunulduğudur. Artık biçimselciliğin altındaki temel fikirler incelendiği için, Carnap'ın bunları kendi felsefesini geliştirirken nasıl kullandığı da incelenebilir.

II. Rudolf Carnap'ın analitik felsefesi ve felsefi projesi

Rudolf Carnap, 20. yüzyılın başında felsefenin ajandasını belirlemiş olan *Viyana Çevresi*'nin temel düşünürlerinden biri ve sözü edilen topluluğun bir ürünü olan *mantıksal pozitivizmin* temel teorisyeniydi. Mantıksal pozitivizm, bir ayağı mantık ve matematik felsefesi, diğer ayakları dil felsefesi ve epistemoloji olan bir metafelsefe yaklaşımıydı. Bu yaklaşımın temel parolası, iyi bilindiği üzere *doğrulanabilirlik ölçütü*dür. Anlamlı, dolayısıyla tartışmaya değer ifadelerin yalnızca (1) doğa ve insan bilimlerinin doğruluk değeri olgulara göre belirlenen *sentetik* ifadeleri ve

Temmuz/July 2019, 12(2), 44-68
ISSN 1309-1328

(2) mantığın ve matematiğin doğruluk değeri dilin kurallarına göre belirlenen *analitik* ifadelerinden oluştuğunu ileri süren bu ölçüt, anlaşılması kolay bir anlam ölçütü sunsa da karmaşık bir felsefi projeyi teklif etmekteydi. Söz konusu proje birbirinden ne kadar ayrılabileceği tartışmalı olan iki adımdan oluşmaktadır:

1. Metafiziğin (geleneksel felsefeyi de içerecek şekilde) reddi.
2. Bilimin önermelerinin sürekli olarak *açık* kılınması; bu yolla bilimin metafizikten korunması.

Burada birinci adım olan metafiziğin reddi adımı, bilime rakip olma iddiasıyla veya daha açık bir ifadeyle bilimin insanlığa tedarik edemeyeceği nitelikte bir bilgi sunma iddiasıyla ortaya çıkan bütün görüşlerin elenmesi/tasfiye edilmesi adımıdır. Bu adım aynı zamanda geleneksel felsefenin de ortadan kaldırılması demektir. Bu çerçevede Carnap, alaycı şekilde "su metafizikçisi" olarak andığı Thales'in ontolojisinden başlayarak (1935, s. 17), Antik Çağ doğa filozoflarını, Pisagorculuğu, Platonculuğu, tek tözcülüğü ve çok tözcülüğü, maddecilik ve ruhçuluğu, Spinoza felsefesini, Alman idealizminin önemli temsilcilerini, realizm ve idealizmi, tekbenciliği ve hatta *Viyana Çevresi* öncesi pozitivizmi bile metafizik yapmakla suçlar (1935, s. 15-22). Böylece Carnap'a göre geleneksel felsefenin neredeyse tamamı, etik tartışmalar da dahil olmak üzere, metafizik, yani anlamsız ifadeler topluluğundan başka bir şey değildir. Thales'ten başlayarak bütün bu filozofların ortak özelliği, kasıtlı olarak anlamsız, yani empirik olarak sınanamaz ifadeler ileri sürerek, sözde "empirik bilimdekinden daha yüksek seviye bir bilgi öğretme" görüntüsü vermeye çalışmalarıdır. (1935, s. 17).

Projenin ikinci adımı ise birinci adımla ilgilidir. Madem geleneksel felsefe doğrulanamaz, dolayısıyla anlamsız ifadeler ileri sürmekten başka bir şey yapmamıştır, o halde felsefede bir reform gerekmektedir. Dünya ve şeylerin doğası hakkında konuşmak felsefenin değil, empirik gözlemlere dayanmak şartıyla bilim insanının işidir. Bu temelde gelecekteki felsefe, Carnap'ın ifadesiyle *doğal felsefe* olmalıdır. Doğal felsefenin görevi "bilimin", dolayısıyla "bilimin dil sisteminin" mantıksal analizini yapmaktır (1935, s. 84). Bunu yapmak ise bilimin önermelerinin birbirleri ile olan mantıksal sonuç ilişkilerini soruşturmaktır. Yani bilimde hangi önermeden hangi önermenin mantıksal olarak çıkarılabileceğini sorgulamak, bu yolla bu önermelerin doğrulama yöntemini, yani hangi şartlar altında doğru, hangi şartlar altında yanlış olduğunu ortaya çıkarmaktır. Böylece felsefe artık *bilimin mantığı* haline gelerek (2001[1934], s. xiii) ve bilimi oluşturan önermelerin anlamlarını muğlaklıktan kurtararak, metafizik ifadelerin bilime giriş yapmasını engelleyecektir.

Temmuz/July 2019, 12(2), 44-68
ISSN 1309-1328

Daha açık bir ifadeyle felsefenin bundan sonraki görevi, bilimin ifadelerini veya insanlığa "bilimsel" sıfatıyla sunulan ifadeleri *dil analiz*inden geçirerek *bilim* ile *sözde bilim*i ayırmaktır.

Şimdi, buraya kadar Carnap'ın bilindik analitik *metafelsefe* görüşlerinin kısa bir özetini sunduktan sonra artık bu çalışma açısından önemli olan noktaya gelinebilir. Okuduğunuz bu çalışmada savunulmaya çalışılan görüş şudur ki Carnap'ın yukarda sözü edilen iki adımlı projeyi gerçekleştirmek için teklif ettiği şey, esasta David Hilbert'in yolundan gitmekti. Daha açık bir ifadeyle Carnap, yukardaki metafelsefi projeyi gerçekleştirmek için Viyana Çevresi'nin doğrulanabilirlik ölçütü ile görüşlerinden çok etkilendiği Hilbert'in biçimselci matematik felsefesinin ve metamatematiksel kanıt kuramının bir sentezini yapmaya çalışmıştır.

Söz konusu yaklaşım basitçe şöyle ifade edilebilir: Doğa bilimini oluşturan önermeler topluluğu olarak kuramlar (Hilbert'in matematik için öngördüğü türden) *biçimsel* bir dil çerçevesi içinde analiz edilmelidir. Diğer bir deyişle doğa bilimine ait kuramlar, tıpkı Hilbert'in matematiği dönüştürmeye çalıştığı türden aksiyomatik biçimsel sistemler veya kalkülüsler veya Carnap'ın ifadesiyle, *fizik kalkülüsleri* haline dönüştürülerek analiz edilmelidir. Felsefenin görevi bu analizi biçimsel olarak yaparak bilimin üst dili haline gelmektir.

Şimdi, bu noktayı görmek için sıradaki bölümlerde önce Carnap'ın en başta mantık ve matematik kalkülüsleri için geliştirdiği ünlü *hoşgörü ilkesi* incelenecek ardından Carnap'ın fizik kalkülüsleri anlayışı incelenip Hilbert'in etkileri açık kılınacaktır.

III. Hilbert'in, Carnap'ın *sözdiziminde hoşgörü ilkesi*nin formülasyonuna etkisi

Öncelikle daha önce de belirtildiği gibi, Carnap'ın metafelsefe anlayışının temelindeki doğrulanabilirlik ölçütü mantık ve matematiğin analitik ifadeleri ile doğa ve insan bilimlerinin sentetik ifadeleri arasında anlambilimsel bir ayrım olduğunu varsayar. Ancak bu ayrım aynı zamanda epistemolojik bir ayrımdır. Çünkü Carnap'a göre bilimi oluşturan önermelere dair anlambilimsel sorun ile epistemolojik sorun arasında kopmaz bir bağ vardır. Söz konusu bağ Wittgenstein'dan Viyana Çevresi düşünürlerine miras kalan şu görüş etrafında kurulur: Eğer bir cümle doğru olduğunda tam olarak ne olduğunu bilseydik, anlamını da bilirdik (Carnap 1936; s. 420, Wittgenstein, 2008, Tez: 4.024).

Temmuz/July 2019, 12(2), 44-68
ISSN 1309-1328

Bu çerçevede bilimi oluşturan önermelere bakıldığında *sentetik* önermelerin bilimde önemli bir sınıfı oluşturduğu görülür. Bunlar doğa ve insan bilimlerinin temel kuramlarıdır ve dünyadaki durum ve olaylar hakkında bir resim sunar. En basit ifadeyle bu sınıfın önermeleri "dünyada şu veya bu şekilde betimlenebilecek bir olgu durumu bulunmaktadır" bildiriminde bulunur. Bu tip önermeleri iki şekilde doğrulamak (daha doğrusu doğruluklarına dair kanaatimizi pekiştirmek) mümkündür: Doğrudan veya dolaylı olarak. Doğrudan doğrulama, önermenin doğrudan kendisinin empirik olarak sınanmasıdır. Dolaylı doğrulama ise doğrudan doğrulamanın mümkün olmadığı durumlarda önermenin, kendisinden *mantıksal* olarak çıkarılabilecek *algı ifadeleri* yoluyla dolaylı olarak empirik sınamaya tabi tutulmasıdır. Örneğin belirli bir demir parçasının mıknatıs olduğu iddiasını doğrulamak için bu ifadeden "eğer bu bir mıknatıssa kendisine yaklaştırılan demir tozlarını çeker" şeklinde bir algı ifadesini mantıksal olarak çıkarmak ve bu deneyi yapmak bir dolaylı doğrulama örneğidir (Carnap, 1935, s. 10-13).

Mantık ve matematiğin ifadeleri ise saf mantık ve saf matematik bağlamından çıkarılıp bilime uygulandığında bilimin *analitik* ifadelerini oluşturur. Analitik ifadelerin bilimdeki işlevi, sentetik ifadelerin işlevinden farklıdır: Analitik ifadeler "dünyada şu veya bu şekilde betimlenecek bir olgu durumu olduğu" bildiriminde bulunmaz. Bunun yerine bu ifadeler "şu ve bu ifade kümesinden şu veya bu ifade çıkarılabilir" şeklinde bir bildirimde bulunur. Böylece analitik ifadelerin bilimdeki işlevi hangi sentetik ifadeden hangi sentetik ifadenin mantıksal olarak çıktığını sabitlemek, yani sentetik ifadeler arasındaki çıkarımsal bağı kurmaktır. Carnap'ın kendisinin de belirttiği gibi "[b]ütün bilgi sisteminde kavram, ifade ve çıkarım formlarını, yani her yere, dolayısıyla mantıksal olmayan bilgiye de uygulanabilir formları sağlamak mantık ve matematiğin görevidir" (1963; s. 12). Anlaşılırlık amacıyla bazı basit örnekler vermek gerekirse "$((PVQ) \wedge \neg Q) \rightarrow P)$" gibi bir mantıksal (dolayısıyla analitik) ifade, olgular hakkında bir bildirimde bulunmasa da "bu cihazın yazılımında veya donanımında bir sorun bulunmakta" ve "bu cihazın donanımında bir sorun bulunmamakta" gibi iki sentetik ifadeden "bu cihazın yazılımında bir sorun bulunmakta" gibi başka bir sentetik ifadenin türetilmesini sağlar. Matematiğin ifadeleri de aynı işleve sahiptir. Örneğin "7+5=12" gibi matematiğe ait olan bir ifade "elimde 7 elma bulunuyor" ve "elimde 5 elma daha bulunuyor" gibi iki sentetik ifadeden "elimde 12 elma bulunuyor" şeklinde başka bir sentetik ifadenin türetilmesini sağlar. Bu anlamda matematik önermelerinin temel mantık önermelerden ciddi bir kuramsal farkı bulunmamaktadır. Aradaki tek fark matematiğe ait ifadelerin "temel mantıktakinden daha kısa ve etkili tümdengelimli çıkarım modları" sağlamasıdır (Bu konuda

Temmuz/July 2019, 12(2), 44-68
ISSN 1309-1328

Carnap pek çok yapıtında çeşitli açıklamalar yapmış olsa da genel bir özet için Carnap, 1939, s. 44 ve 1953[1935], s. 125-126 görülebilir).

Dolayısıyla okuyucunun da kolayca tahmin edebileceği gibi analitik ifadeler, felsefenin yegane yöntemini "bilimin dil sisteminin analizi" olarak gören Rudolf Carnap'ın analitik metafelsefi projesinde önemli bir yer işgal eder. Çünkü felsefenin bilimin bir önermesini analiz etmesi demek, bu ifade için doğrulama yöntemini bulması demektir ve bunu bulmak bu önermeden mantıksal olarak hangi önermelerin çıkarılabileceğini de analiz etmeyi gerektirir. Mantık ve matematik bize bu analizi yapmayı sağlayacak dil çerçevesini sağlar. Daha felsefi bir dille ifade edilirse mantık ve matematik (kalkülüsleri) bilim dilinin mantıksal analizini içinde formüle edebileceğimiz sentaktik dil çerçevesini sağlar.

Diğer taraftan burada önemli bir sorun ortaya çıkmaktadır: Felsefi analizi içinde formüle edeceğimiz dil çerçevesini mantık ve matematiğin ifadeleri sağlıyorsa söz konusu bu çerçeve hangi mantık ve matematik felsefesi çerçevesinde inşa edilmelidir? Şimdi, belirtmek gerekiyor ki bu soru Carnap açısından ciddi bir sorundur. Çünkü bu çalışmanın başında da belirtildiği gibi 19. yüzyılın sonu ile 20. yüzyılın ortası arasındaki dönem *matematiğin temelleri* tartışmalarının çok hararetli bir şekilde sürdürüldüğü bir dönemdi. Bu nedenle söz konusu dönem neyin "mantık" ve neyin "matematik" olduğuna dair çok şiddetli tartışmalara sahne olmaktaydı ve tartışmaların taraftarları *a priori* felsefi refleksiyonlara dayanan argümanlar yoluyla kendi mantık ve matematik felsefelerinin *doğru* olduğu konusunda rakiplerini ikna etmeye çalışmaktaydı. Rudolf Carnap ise bu tartışmaları çok yakından takip eden bir filozoftu ve kendi felsefesi açısından kritik öneme sahip olduğu için bu tartışmalara bir çözüm geliştirme niyetindeydi.

Carnap'ın matematiğin temelleri sorununa yönelik geliştirdiği çözüm önerisi ise Gottlob Frege'nin (en azından Carnap'ın Frege yorumunun) görüşleri ile David Hilbert'in görüşlerinin bir sentezi oldu. Bu çözüm ise Carnap'ın ünlü *sözdiziminde hoşgörü ilkesi*ydi (İng. *the principle of tolerance in syntax*) ve ilk defa Carnap *Dilin Mantıksal Sözdizimi* (2001)[1934] yapıtında ortaya koyulmuştu. Sonraları Carnap bu ilkeyi *uzlaşımsallık ilkesi* (Carnap 1948[1942], s. 247) veya *dil biçimlerinin uzlaşımsallığı ilkesi* (Carnap, 1963, s. 55) gibi farklı adlarla da anmıştır. Ayrıntılar bir kenara bırakılırsa Carnap'ın hoşgörü ilkesinin matematiğin temelleri sorununa çözümü genel hatlarıyla şu dört maddeyle listelenebilir:

Temmuz/July 2019, 12(2), 44-68
ISSN 1309-1328

1. Mantıkçılar, matematikçiler ve filozofların işi *a priori* felsefi refleksiyonlar yoluyla neyin nesnel olarak doğru mantık veya neyin nesnel olarak doğru matematik olduğunu tartışarak saf mantığa ve saf matematiğe "yasaklamalar/kısıtlamalar" koymak değildir. (Carnap 2001[1934], s. 51; 1939; s. 28).
2. Bu temelde mantıkçılar ve matematikçiler kendi felsefelerini rakip felsefelere karşı savunmak/tartışmak istiyorsa bundan sonra gerçekleştirmeleri gereken öncelikli şart, yeni "felsefi argümanlar" bulmak değil, "sözdizimsel kurallar" yoluyla kendi yöntemlerini "açık" kılmaktır (Carnap 2001[1934], s. 52). Basitçe bunun anlamı şudur: Mantıkçılar ve matematikçiler kendi felsefeleri temelinde biçimsel mantık ve matematik kalkülüsleri, yani aksiyomatik biçimsel sistemler üretmelidir. Bu şart gerçekleştirilmediği müddetçe kimsenin felsefesi (rakip anlayışlardan nasıl ayrıldıklarıyla birlikte) açık kılınamaz. Yani formülasyonları muğlak kalır. (Hatta Carnap bu temelde Jan Brouwer'in sezgici matematik felsefesini, bir kalkülüse sahip olmadığı için muğlakça formüle edildiği gerekçesiyle eleştirir: 2001[1934], s. 46-48)
3. Dolayısıyla biçimsel kalkülüslerini oluşturdukları müddetçe saf mantık ve saf matematik açısından bütün matematik felsefelerine (gelecekte geliştirilmesi mümkün başka felsefeler de dahil olmak üzere) *hoşgörüyle* ve tarafsız yaklaşılmalı, önleri tıkanmamalıdır.
4. Bundan sonraki aşamada ise şimdiye kadar geliştirilmiş ve gelecekte geliştirilmesi mümkün mantık ve matematik felsefelerinin, daha doğrusu bu felsefelerin somutlaştırılmış hali olan biçimsel kalkülüslerin kaderine *uygulamalı mantık ve matematik* karar vermelidir. Carnap'ın da belirttiği gibi "[g]örev bu farklı sistemlerin hangisinin ˋdoğru mantıkˊ olduğuna karar vermek değildir; bunu yerine onların biçimsel özelliklerini ve bilimde yorumlanma ve uygulanma olasılıklarını sınamaktır" (1939, s. 28-29). Çünkü bir gün bu mantık ve matematik kalkülüslerinden herhangi birinin "bilimin diline temel olmak bakımından" yararlı olabilmesi mümkündür (1939, s. 29).

Şimdi, Carnap'ın matematiğin temelleri sorununa yönelik geliştirdiği hoşgörü ilkesi yukardaki gibi dört madde olarak listelenirse burada dördüncü maddede elbette Frege'nin etkisi bulunmaktadır. Carnap, matematiğin temelleri tartışmasının (Hilbert'in görüşünün aksine) *saf matematik* içinde

Temmuz/July 2019, 12(2), 44-68
ISSN 1309-1328

değil, nihai olarak *uygulamalı matematik* içinde çözülebileceğine inanıyordu[1]. Bu görüşte Carnap'ın belirttiği üzere Frege'nin etkisi büyüktür (1963, s. 48).

Diğer taraftan dördüncü maddede betimlenen aşamaya gelinceye kadar saf mantık ve saf matematik içinde yapılması gereken şey şimdiye kadar geliştirilmiş ve gelecekte de geliştirilmesi mümkün matematik felsefelerine, kalkülüsler veya aksiyomatik biçimsel sistemler oluşturdukları müddetçe hoşgörülü davranmak ve böylece yeni kalkülüslerin inşasına teşvikte bulunmaktır. İşte David Hilbert biçimselciliğinin etkisi de tam olarak burada, yani yukardaki listenin ilk üç maddesinde ortaya çıkmaktadır. (1) Öncelikle biçimselleştirme, çeşitli mantık ve matematik felsefelerinin teklif ettiği yöntemleri muğlaklıktan kurtararak somutlaştırır ve açık kılar. Bu ise basitçe Carnap'ın, Hilbert'in matematiğin temellerinin ve kanıt ilişkilerinin neden aksiyomatik biçimsel sistemler yoluyla çalışılması gerektiğine ilişkin gerekçelerini (somutluk ve açıklık) kabul ettiğini gösterir. (2) İkinci olarak biçimselleştirme yöntemi, çeşitli mantık ve matematik anlayışlarına karşı hoşgörüyü ve tarafsızlığı beraberinde getirir. Çünkü günün sonunda bir mantık ve matematik felsefesinin kalkülüsleştirilmesi yoluyla ortaya çıkacak şey yorumlanmamış bir simge oyunundan başka bir şey değildir ve Carnap'a göre saf matematik içinde kalındığı müddetçe bir simge oyununu başka bir simge oyununa tercih etmemizi sağlayacak hiçbir ölçüt yoktur. Sonuç olarak Carnap'ın ünlü hoşgörü ilkesinde hoşgörüyü ve çeşitli matematik felsefelerine karşı tarafsızlığı sağlayan asıl şey bütün çeşitli yaklaşımlara birer saf, yorumlanmamış simge oyunu olarak bakabilmektir. Böylece Carnap'ın ünlü hoşgörü ilkesinin formülasyonunda Hilbert biçimselciliğinin çok açıkça önemli bir etkisi bulunmaktadır.

[1] Okuduğunuz bu makalenin bu bölümüyle ilgili olarak hakem sürecinde şöyle bir eleştiri yöneltilmiştir: "Burada Carnap'ın önerisi tartışmanın "nihai" olarak nasıl bitirilebileceğine ilişkin bir öneri olarak görülmüştür. Oysa kanımca Carnap tartışmanın nihai olarak bitirilemeyeceğini savunur. Tam da bu yüzden hoşgörü ilkesi (yazarın da belirttiği gibi) yeni arayışlara da açık kalmalı ve bizim pragmatik olarak benimsemediklerinizin yasaklanmasından kaçınılmalıdır. Zira pragmatik ölçütlerin neyi seçeceği zamanla değişebilir". Sayın hakemin gayet haklı ve yerinde tespiti temelinde burada bir açıklama yapma gereği ortaya çıkmıştır. Çünkü buradaki "nihai çözüm" ifadesi gerçekten de anlam karmaşasına yol açabilir. David Hilbert'in matematiğin temelleri tartışmasının çözümü için teklifi hem klasik matematikte çözülmemiş herhangi bir sorun bırakmayan hem de iç tutarlılığa sahip bir biçimsel kalkülüsün geliştirilmesiydi. Bu teklif ise Carnap'a göre iki açıdan sıkıntılıdır. Öncelikle Kurt Gödel'in 1930'ların başında kanıtlamış olduğu ikinci eksiklik teoremi David Hilbert'in aradığı türde bir kalkülüsün geliştirilemeyeceğini göstermişti ve Gödel'in akıl hocalarından biri olan Carnap bu teoremden haberdar olan ilk kişilerdendi. Ancak daha önemlisi Hilbert'in teklifi matematiğin temelleri tartışmasının yalnızca matematik içi gereklilikler göz önünde bulundurularak çözülmesi gerektiğini ima eder. Ancak mantık ve matematiğin asıl değerinin empirik bilimdeki başarılı uygulamalarında yattığını düşünen Carnap'a göre matematik içi gereklilikler önemli olmakla, tartışmanın çözümü açısından yeterli değildir. Bu bakımdan ona göre çözüm "nihai" olarak uygulamalı matematik içinde aranmalıdır. Ancak burada "nihai çözüm" ifadesi belirli bir mantık ve matematik kalkülüsünün pragmatik ölçütler temelinde seçilip *süresiz* şekilde bilime uygulanması biçiminde anlaşılmamalıdır. Bilimin ihtiyaçları zamana göre değişebileceği gibi bilimin tek tek çeşitli alanlarında bile farklılıklar gösterebilir. Bu bakımdan Carnap'a göre uygulamalı matematik içinde yapılması gereken şey birbirlerine rakip olan çeşitli mantık/matematik sistemlerinin (gelecekte geliştirilecek sistemler de dahil olmak üzere) avantaj ve dezavantajlarını sorgulamak ve *sürekli olarak* "bilimde yorumlanma ve uygulanma olasılıklarını sınamaktır".

Temmuz/July 2019, 12(2), 44-68
ISSN 1309-1328

Burada bir not olarak şunu belirtmek gerekiyor ki bu nokta ilk defa okuduğunuz bu çalışmada tespit edilmemiştir. Örneğin Michael Friedman da daha önceden benzer bir tespiti şu şekilde dile getirmiştir:

> (…) Carnap'ın mantığın kendisi hakkındaki tarafsız duruşunu sürdürmesi nasıl mümkün olabilir? İşte tam da burası Hilbert metamatematiğinin temel fikirlerinin devreye girdiği yerdir. Biçimsel sistemleri yöneten mantık kuralları veya konu edilen kalkülüs[ler] mantıksal sözdizim metadisiplininde betimlendiğinde, her sistem basitçe bir simge dizisi kümesi ve bu dizileri ("anlamlarıyla" ilgili sorudan tamamen bağımsız şekilde) dönüştürmek için gerekli kurallar bütünü olarak görülür ve o zaman bütün biçimsel sistemler saf sözdizimsel meta-dilin tarafsız duruş noktasından belirlenebilir. (…) Amacımız bir sistemi doğal olarak daha doğru diye başkalarına karşı gerekçelendirmeye çalışmak değildir; fakat basitçe böyle bir sistemi seçmenin *sonuçlarını* betimlemektir (Friedman, 1999, s. 12).

Carnap'ın hoşgörü ilkesinin formülasyonunda Hilbert biçimselciliğinin etkisi konusu etrafında benzeri yorumlar Thomas Ricketts (2009, s. 219-222) ve Erich Reck (2012, s. 100) gibi yorumcular tarafından da yapılmıştır. Sonuç olarak Carnap'ın 1930'lar sonrası metafelsefi yaklaşımının önemli bir parçası olan *hoşgörü ilkesi*nin formülasyonunda Hilbert biçimselciliğinin etkisi yadsınamayacak kadar açıktır.

IV. Carnap'ın *fizik kalkülüsleri*, biçimselcilik ve analitik felsefe

Diğer taraftan önemli nokta henüz açıklığa kavuşturulmuş değil. Varsayalım ki şimdiye kadar geliştirilmiş ve hoşgörü ilkesinin beraberinde getirdiği felsefi özgürlük sayesinde bundan sonra geliştirilecek potansiyel matematik felsefeleri, *a priori* felsefi refleksiyonlarla savunulmak yerine aksiyomatik biçimsel sistemlere veya kalkülüslere çevrilsin ve bu kalkülüslerin kaderine uygulamalı mantık ve matematik karar versin. Ancak bu kalkülüsleri bilime nasıl uygulayabiliriz? Dahası bu uygulama bilimsel kuramların mantıksal analizinde nasıl bir rol oynar? Carnap'ın bu tür sorulara yanıt olarak geliştirdiği fikir *fizik kalkülüsleri*dir. O halde bu son bölümde söz konusu fikir kısaca açık kılınacak ve burada Hilbert'in etkisi gösterilecektir.

Temmuz/July 2019, 12(2), 44-68
ISSN 1309-1328

Rudolf Carnap fizik kalkülüsleri fikrini ilk defa *Dilin Mantıksal Sözdizimi* (2001 [1934]) yapıtında ileri sürmüş ve sonraki yapıtlarında bazı değişikliklerle geliştirilmiştir. Bu kalkülüslerin altında yatan temel fikir bu çalışmanın birinci bölümünde incelenen türden bir biçimsel mantık-matematik kalkülüsünü temel alarak ve bu sisteme belirli bir doğa bilimi kuramının temel yargılarını aksiyom veya çıkarım kuralları olarak ekleyerek, onu bir empirik/bilimsel hipotez türetme sistemine çevirmektir.

Bir örnek olarak Carnap'ın (1939, s. 56-60)'ta yaptığı açıklamalar temelinde cisimlerin sıcaklık değişimine bağlı termik veya ısıl genleşmelerini konu eden bir kalkülüs şöyle kurulabilir. Öncelikle bir mantık-matematik kalkülüsü biçimsel bir dil çerçevesi olarak temel alınır ve bu sisteme fizik dünyadaki durum ve nesnelere referansta bulunan semboller eklenir. Örneğin: "x katı bir cisimdir" "(Katx)", "x bir demirdir" (Demx), "x'in t zamanındaki santimetre cinsinden uzunluğu" uz(x,t), "x'in t zamanındaki santigrat cinsinden mutlak sıcaklığı" sıc(x,t), "x'in termik genleşme katsayısı" (terx), vb. Kısacası fizik kalkülüsleri, mantık/matematik kalkülüslerinden farklı olarak, söz varlığında yalnızca mantıksal/matematiksel karakterli simgeleri değil, aynı zamanda fiziksel terimler de (Carnap bunlara "betimleyici terimler" adını vermiştir) içerir.

Bu çerçevede ilgili fizik terimlerine dair fizik yasaları sisteme şu şekilde birer aksiyom olarak eklenebilir:

1. $(\forall x,t_1,t_2,u_1,u_2,T_1,T_2,\beta)$ { [Katx $\wedge$ $uz(x,t_1) = u_1$ $\wedge$ $uz(x,t_2) = u_2$ $\wedge$ $sıc(x,t_1) = T_1$ $\wedge$ $sıc(x,t_2) = T_2$ $\wedge$ $(terx) = \beta$] $\rightarrow$ $u_1 = u_2 \bullet (1 + \beta \bullet (T_2 - T_1))$ }
2. $(\forall x)$ [(Katx $\wedge$ Demx) $\rightarrow$ terx = 0.000012]. (Carnap, 1939, s. 58)

Böylece ifade oluşturma kurallarıyla, mantıksal, matematiksel ve fiziksel aksiyomlarıyla, çıkarım kurallarıyla, cisimlerin belirli bir zaman aralığında sıcaklık değişimine bağlı termik veya ısıl genleşmesini konu eden bir kalkülüs elde edilmiş olur ve bu kalkülüsten deneyi yapılabilecek çeşitli hipotezler mantıksal olarak çıkarılabilir. Örnek olarak böyle bir sistemde yapılabilecek bir mantıksal çıkarımın analizi aşağıdaki gibi yapılabilir:

1. Katc // Öncül: c katı bir cisimdir.
2. Demc // Öncül: c bir demirdir.
3. $sıc(c,t_1) = 300$ // Öncül: c'nin t_1 anındaki sıcaklığı 300 santigrattır.
4. $sıc(c,t_2) = 350$ // Öncül: c'nin t_2 anındaki sıcaklığı 350 santigrattır.

Temmuz/July 2019, 12(2), 44-68
ISSN 1309-1328

5. $uz(c,t_1) = 1000$ // Öncül: c'nin t_1 anındaki uzunluğu 1000 santimetredir.
6. $(\forall x,t_1,t_2,u_1,u_2,T_1,T_2,\beta)$ $\{$ [$Katx \wedge uz(x,t_1) = u_1 \wedge uz(x,t_2) = u_2 \wedge sıc(x,t_1) = T_1 \wedge sıc(x,t_2) = T_2 \wedge (terx) = \beta$] $\rightarrow u_1 = u_2 \bullet (1 + \beta \bullet (T_2 - T_1))$ $\}$ // Aksiyom 1
7. $(\forall u_1,u_2,T_1,T_2,\beta)$ $\{u_2 - u_1 = u_1 \bullet \beta \bullet (T_2 - T_1) \leftrightarrow u_2 = u_1 \bullet (1 + \beta \bullet (T_2 - T_1))$ //Matematik teoremi
8. $(\forall x,t_1$…. (6'daki gibi)…. [(…)$\rightarrow u_2 - u_1 = u_1 \bullet \beta \bullet (T_2 - T_1)$] // 6 ve 7'den.
9. $(\forall u_1,u_2,\beta)$ $\{[terc=\beta \wedge uz(c,t_1)=u_1 \wedge uz(c,t_2)=u_2] \rightarrow u_2 - u_1 = u_1 \bullet \beta \bullet (350-300)\}$//1, 3, 4, 8'den.
10. $(\forall x)$ [($Katx \wedge Demx) \rightarrow terx = 0.000012$] // Aksiyom 2
11. $terc = 0.000012$ // 1, 2, 10'dan.
12. $(\forall u_1,u_2)\{[uz(c,t_1)=u_1 \wedge uz(c,t_2)=u_2] \rightarrow u_2 - u_1 = 1000 \bullet 0.000012 \bullet (350-300)\}$ //9,11 ve 5'ten
13. $1000 \bullet 0.000012 \bullet (350-300) = 0.6$ // Matematik teoremi
14. $uz(c,t_2) - uz(c,t_1) = 0.6$ // Sonuç: 12 ve 13'ten. (Carnap, 1939, s. 59)

Dikkatle incelendiğinde yukarda yapılan şey basitçe iki fizik yasasını biçimsel aksiyomlar olarak mantıksal/matematiksel bir kalkülüse ekleyerek belirli bir konuya dair fizik kalkülüsü oluşturmak; ardından bu aksiyomlardan 1000 cm uzunluğundaki katı haldeki bir demir parçasının, belirli bir zaman aralığında 300 santigrat dereceden 350 santigrat dereceye çıkarıldığında genleşme nedeniyle uzunluğunda meydana gelecek değişmenin 0.6 santimetre olacağı biçiminde bir sonucu türetmektir. Yani fizik kuramlarından *deneyi yapılacak* bilimsel bir hipotez türetme işini, biçimsel bir kalkülüs yardımıyla bir dil çerçevesi içinde yapmaktır.

Burada dikkat edilebilecek unsurlardan biri, yukardaki çıkarımın Hilbert'in "saf formül oyunu" dediği şeyle yapılmasıdır. Dolayısıyla bir grup kişi yukardaki çıkarımın geçerliliğini ve böylece bu kuramdan *tam olarak neyin mantıksal olarak çıktığını* sorgulamak isterse yapmaları gereken şey termik genleşme, demir, uzunluk, sıcaklık gibi terimlerin anlamını sorgulamak değil, biçimsel dönüştürme kurallarının düzgün şekilde kullanılıp kullanılmadığını sınamaktır (Carnap, 1939, s. 58).

Diğer önemli bir nokta Viyana Çevresi'nin doğrulanabilirlik ölçütü anlam ile doğrulanabilirlik arasında bir ilişki varsaydığı için, bu yöntemin fizik kuramlarının anlamını da biçimsel bir yolla açık kılacağıdır: Eğer bir kuramdan deneyi yapılabilecek hangi hipotezlerin mantıksal olarak çıkarılabileceği analiz edilebilirse bu kuramın empirik anlamı da daha açık hale gelir. Bu bakımdan yukardaki çıkarım, termik genleşmeye dair yukarda sayılan iki yargının anlamını (onlardan neyin çıktığını biçimsel olarak sabitleme yoluyla) açık kılıcı bir role sahiptir. Bilimi muğlaklıktan

Temmuz/July 2019, 12(2), 44-68
ISSN 1309-1328

korumak, yani açıklık ise Carnap'ın analitik metafelsefesinin temel hedeflerinden biridir. Dahası bu yöntem söz konusu iki yargının doğrulanamaz, anlamsız, *sözde-cümle*lerden olmadığını da biçimsel olarak açık kılmaktadır. Carnap'a göre metafizik, yani sözde-cümlelerin temel özelliği, onlar bu şekilde bir kalkülüse çevirmeye çalışıldığında "bir [gerçek] cümle olduğunun görülebilmesini sağlayacak yeterli cümle oluşturma kurallarının" veya "empirik bir sınamaya tabi tutulabilmelerini sağlayacak yeterli dönüştürme kurallarının" verilememesidir (2001[1934], s. 322). Böylece neyin doğrulanabilir olup neyin olmadığı bu türden bir kalkülüs yardımıyla karar verilecek bir konudur.

En önemli noktalardan bir başkası ise yukardaki çıkarımda fizik kavramlarının sistemde açıkça değil, aksiyomlar yoluyla örtük biçimde tanımlanmasıdır (*implicit definition*). Yani fiziksel bir kavramın anlamı, aksiyomatik biçimsel sistem veya fizik kalkülüsü içinde, onunla ilgili simgelerin aksiyomlarda (veya çıkarım kurallarında) nasıl bir rol oynadığına göre belirlenir. Rudolf Carnap, başta Moritz Schlick olmak üzere Viyana Çevresi düşünürlerinin fizik kavramlarını bu yöntemle tanıtma fikrini "Hilbert'in biçimselci yönteminden" öğrendiklerini belirtmiştir (1963, s. 21). Fizik kavramlarının anlamlarının bu şekilde tanıtılması fikrinin önemi ise özellikle Carnap'ın analitik metafelsefi projesinin metafiziğin elenmesi/tasfiye edilmesi basamağında kendini gösterir. Carnap bu konuda şunu ifade eder:

> Yeni ifade edilmiş bir betimleyici terim [doğa bilimi terimi], bir tanım yoluyla daha önceki terimlere indirgenemiyorsa veya test edilebilir F-ilksel cümleler [fizik aksiyomları] yoluyla tanıtılamıyorsa *sözde-kavram* olduğu gösterilmiş olur (2001[1934], s. 322).

Yani bilimin diline metafizik bir terim sokulmaya çalışıldığında, ki bu ancak bu terimle ilgili yargıların tanıtılmasıyla mümkündür, bu terim ya daha önceki bilimsel terimler yoluyla tanımlanamayacak ya da onun empirik olarak sınanabilmesine olanak sağlayacak fizik aksiyomları bulunamayacaktır.

Yukardaki örnek çıkarım Carnap'ın analitik metafelsefi anlayışını ve *mantıksal analiz* yöntemini de özetler niteliktedir. Çünkü Carnap, "herhangi bir fizik kuramının", hatta "fiziğin bütününün" bu yolla analiz edilebileceğini, gelecekte ise biyoloji, kimya, ekonomi ve "psikoloji ve sosyal bilimin temel bazı bölümlerinin de" bu yolla analiz edilebilmesinin mümkün olacağını öngörmekteydi (1939, s. 60). Bu anlayışta felsefe ise bilimin bütün bu alanlarının kuramlarını ve gelecekte kendini

Temmuz/July 2019, 12(2), 44-68
ISSN 1309-1328

bilimsellik iddiasıyla sunacak potansiyel kuramları yukardakine benzer şekilde analiz ederek bilimin üst dili haline gelmektedir. Carnap bu noktayı şöyle ifade eder:

> "*Felsefe bilimin mantığıyla değiştirilmelidir* – yani bilimin kavram ve cümlelerinin mantıksal analiziyle; çünkü *bilimin mantığı, bilimin dilinin mantıksal sözdiziminden başka bir şey değildir*" (2001[1934], s. ix).

Sonuç

Bütün bu incelemenin sonucunda kısaca denilebilir ki David Hilbert'in metamatematik yoluyla matematikte yapmaya çalıştığının bir benzerini Rudolf Carnap analitik felsefesiyle bilimin bütününde yapmaya çalışmıştır. Diğer bir deyişle Hilbert metamatematiği matematiğin üst dili olarak konumlandırırken, Carnap felsefeyi genel olarak bilimin üst dili olarak konumlandırmaya çalışmıştır. Carnap da bu noktayı kendine has terminolojisiyle şöyle ifade eder:

> Hilbert metamatematiğini yalnızca nesne dilinde formüle edilmiş matematiksel bir sistemin tutarlılığını kanıtlamak amacıyla tasarlamışken ben genel bir dil formu kuramını amaçladım (1963, s. 54).

İki düşünür de biçimselciliği, daha doğrusu biçimsel kalkülüsler fikrini benzer amaçlar için kullanmıştır: Uslamlamada açıklık, muğlaklıktan kaçınma, çıkarımlarda terimlerin anlamına başvurmama vb. Tek fark şudur ki Hilbert'in asıl tasfiye etmeye çalıştığı şey matematikte ortaya çıkabilecek potansiyel çelişkilerken Carnap'ın tasfiye etmeye çalıştığı şey metafiziktir. Biçimselcilik her iki düşünür için de tasfiye etmeye çalıştıkları şeylere karşı bir silah görevi görmektedir. Bunda Hilbert'in Carnap üzerindeki etkisi büyüktür. Carnap bu konuda şunu ifade eder:

> Bizim [Viyana Çevresi'nin] Hilbert'in biçimselci yöntemine büyük bir sempatimiz vardı, çünkü hipotetik-dedüktif yönteme yaptığımız vurguyla uyum içindeydi ve biçimsel sistemlerin oluşturulması ve analizi hakkında onun okulundan çok şey öğrendik (1963, s. 48).

Böylece özetle bu çalışmada savunulduğu gibi Carnap'ın ünlü hoşgörü ilkesi de doğrulanabilirlik ölçütü de analitik felsefesi de ve mantıksal analiz yöntemi de Hilbert'in biçimselci matematik

Temmuz/July 2019, 12(2), 44-68
ISSN 1309-1328

felsefesi ve kanıt kuramından bağımsız olarak anlaşılamaz. Biçimselcilik bütün bu unsurlarda kurucu bir role sahiptir.

Bu çalışma aynı zamanda matematik felsefesini ihmal etmenin çağdaş felsefenin önemli bir bölümünü de karanlıkta bırakma sonucunu beraberinde getireceğini göstermektedir ve bütün felsefe tarihi, çağdaş felsefe de dahil olmak üzere, bu çalışmada konu edilen türde önemli örneklerle doludur.

KAYNAKÇA

Carnap, R. (2001)[1934] *The Logical Syntax of Language*, Londra: Routledge.

Carnap, R. (1935) *Philosophy and Logical Syntax*, Londra: Kegan Paul, Trench, Trubner and Co., Ltd,.

Carnap, R. (1936) "Testability and Meaning", *Philosophy of Science*, 3(4): s. 419-471.

Carnap, R. (1939) "Foundations of Logic and Mathematics", *International Encyclopedia of Unified Science*, 1(3): 1-71, Chicago: The University of Chicago Press.

Carnap R. (1948)[1942] *Introduction to Semantics*, Cambridge, MA.: Harvard University Press,

Carnap, R. (1953) "Formal and Factual Science", *Readings in the Philosophy of Science* içinde. ed. H, Feigl ve M, Brodbeck, New York: Appleton-Century-Crofts.

Carnap, R. (1963) "Intellectual Autobiography", *The Philosophy of Rudolf* içinde, ed. P, A, Schilpp, La Salle, Illinois: Open Court Publishing.

Cook, Roy T. (2009) "Peano Aritmetic", *A Dictionary of Philosophical Logic* içinde, Edinburgh: Edinburgh University Press.

Friedman, M. (1999) *Reconsidering Logical Positivism*, Cambridge: Cambridge University Press.

Hilbert, D. (1967a)[1925] "On the Infinite", *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic 1879-1931* içinde, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Temmuz/July 2019, 12(2), 44-68
ISSN 1309-1328

Hilbert, D. (1967b)[1927] “The Foundations of Mathematics”, *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic 1879-1931* içinde, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times – Vol.3*, Oxford, New York: Oxford University Press.

Reck, E. (2012) “Carnapian Explication: A Case Study and Critique”, *Carnap’s Ideal of Explication and Naturalism* içinde, ed. Pierre Wagner, Hampshire: Palgrave Macmillan.

Ricketts, T. (2009) “From Tolerance to Reciprocal Containment”, *Carnap’s Logical Syntax of Language* içinde, ed. Pierre Wagner, Hampshire: Palgrave Macmillan.

Wittgenstein, L. (2008) *Tractatus Logico-Philosophicus*, çev. O. Aruoba, İstanbul: Metis Yayınları.